ELEMENTI

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE

E DELLA

GEOMETRIA PIANA E SOLIDA

DI FILIPPO ANTONIO

REVELLI

DOTTORE DEL COLLEGIO DELLE ARTI LIBERALI GIA' PROFESSORE DI GEOMETRIA PEL CORSO D' ANNI 26. IN QUESTA REGIA UNIVERSITA', ORA MASTRO AUDITORE NELL'ECCELLENTISSIMA REGIA CAMERA DE' CONTI

PARTE I.

IN TORINO

PRESSO GIAMMICHELE BRIOLO

M. DCC. LXXVIII.

GIAMMICHELE BRIOLO

Questi Elementi di Geometria, che colle ſtampe preſento al Pubblico in lingua volgare, ſono quelli medeſimi, che con mirabile preciſione ed ordine furono in lingua latina compoſti, e dettati nella R. Univerſità di queſta noſtra Metropoli dal Regio Profeſſore di tale facoltà il Signor Filippo Antonio Revelli dall' anno 1750 ſino al 1776

in cui dalla Reale generosa munificenza del felice Regnante nostro Sovrano fu promosso alla ragguardevole carica di Mastro Auditore nella R. Camera de' Conti, in premio delle sue lunghe oneste fatiche, e della sollecita attenzione, con cui per tutto quello spazio di tempo con universale applauso, e gradimento s' impiegò a profitto della studiosa gioventù.

La singolare modestia, ed umiltà senza pari, che adornano il mille volte da bene, e savio Autore, non soffre ch' io m' estenda nel far le lodi della persona sua; nè sono da tanto che vaglia a commendarne gli scritti, essendo questi per l' eccellenza, e merito loro più che bastanti a procacciarli la dovuta riputazione e lode; e siami perciò solamente permesso il dire quanto ho sentito da persone intendentissime, e nelle matematiche versatissime, che non ha Geometria uguale, non che migliore di questa, e su cui con maggior facilità, e da per se stessa, e senza noia possa formarsi la gioventù in tale studio, studio che luminosa face presenta, e sicura guida ad ogni sorta di dottrine.

Ma così van le vicende del mondo, e noi non sappiamo il perchè. Questi stessi elementi ebbero la mala sorte di comparire alla luce nel 1772 in Venezia dai torchi degli eredi

di Niccolò Pezzana in due volumi in quarto; il primo col titolo di *Nuovi Elementi delle matematiche universali contenenti l' Aritmetica, l' Algebra, e la Geometria, con facile, e particolar metodo esposti ad uso della studiosa gioventù*. E l' altro col tititolo di *Elementa matheseos ad usum studiosæ juventutis elucubrata*.

Ebbero la mala sorte dico di comparire, perchè malmenati, informi, e di tanti e tanti madornali spropositi ripieni comparvero; non sapendo cred' io ancora ben distinguere il fil dall' accia quel buon uomo, che volle a suo nome stamparli; egli, come li capitarono alla mano per qualche ignorante scolaro, che aveva mal inteso, e peggio scritti tali elementi, che il laborioso Professore dettò nel principio della sua carriera allor quando era incaricato di reggere la cattedra di matematica, oltre la sua, senza badar più in là, tocco soltanto dal solletico di comparir dotto, fece gnocchi, come suol dirsi, della non sua pasta, e con solenne ridicolosissima prosopopea sen fece bello.

Non sarebbe mancato al prestante autore acconcio modo di rintuzzare sì fatta traccotanza, ma pieno di vera, e soda virtù, gliene fece larga larghissima remissione.

Sappia per altro costui, che non bastava omettere la prefazione, ed aggiungere due dedicatorie, ed un avviso al lettore, e fare una sguaiata traduzione per far apparire suo il non suo; nè bastava il dire d' essersi servito degli elementi di matematica di Mr. de la Chapelle, e di Sympson probabilmente non mai da lui conosciuti, che senza gli occhiali chiunque vede non avere questi scritti alcuna relazione con tali autori.

Il nostro Signor Revelli a cui era prescritto dalle Regie Costituzioni d' insegnare gli elementi d' Euclide, e l' aritmetica, non si è preso veruno per guida, ma bensì con ordine diverso da quello d' Euclide, e di altri autori proccurò con tutta la chiarezza, e brevità possibile di proporre, e dimostrare tutte quelle verità, che ritrovansi in Euclide, ed altrove più utili, e più necessarie a' giovani principianti per acquistare un esatto raziocinio, e che loro abbisognassero per lo studio delle fisiche, e delle matematiche, e che potessero facilmente ancora condurre gli architetti civili, e militari, ed i misuratori a conoscere da per se stessi, e dimostrare le operazioni de' loro problemi.

In queste mie stampe poi, le quali con molta avidità, e con genio intrapresi per dare un attestato di quella gratitudine ch' io tengo verso un tanto maestro, la cui scuola mi glorio d' aver frequentato, se mai per avventura qualche menda s' incontrerà, che sfuggita dall' occhio mi fosse, spero trovar perdono da quel Pubblico rispettabile alla cortese grazia del quale coraggiosamente le porgo.

A. L.

Quest' opera, che pubblichiamo divisa in due volumi, o parti separate, contiene gli Elementi dell' Aritmetica universale divisi in tre libri, e quelli della Geometria piana e solida in sette.

Sonovi nella prima parte i tre libri dell' Aritmetica col primo della Geometria; nella seconda saranno li rimanenti sei libri coll' indice delle operazioni appartenenti alla Geometria pratica dimostrate in essi, e dodici rami delle figure necessarie alle dimostrazioni ivi contenute.

Si spiegano prima d' ogni cosa (pag. 1. e seg.) i vocaboli più frequentemente usati in queste, ed in tutte le altre matematiche scienze.

Nel primo libro dell' aritmetica (pag. 5. e seg.) premesse le necessarie definizioni, e la spiegazione dei caratteri, e dei segni, di cui fa d' uopo servirsi nelle aritmetiche opera-

zioni, s' insegna il calcolo dei numeri, e delle lettere in interi.

Nel secondo (pag. 69. e seg.) si trovano le operazioni aritmetiche delle frazioni, e tra le definizioni di esso libro (pag. 74. e seg.) le necessarie nozioni della ragione geometrica, e della equazione; e (pag. 80., e seg.) i tredici primi assiomi.

Nel terzo si tratta (pag. 110. e seg.) della formazione delle potestà delle quantità, e della estrazione delle radici quadrate (pag. 121. e seg.) delle cubiche (pag. 129. e seg.) da' numeri, e dalle quantità letterali (pag. 134. 137.).

Il calcolo delle quantità radicali si trova per appendice (pag. 142. e seg.).

Il primo libro della Geometria contiene la scienza universale delle ragioni, e proporzioni geometriche (pag. 159. e seg.) delle aritmetiche (pag. 211.) delle armoniche (pag. 227.) le principali proprietà delle progressioni geometriche (pag. 170, 171, e seg. 202, 203, ec.), delle aritmetiche (pag. 213, e seg.). Si dimostra (pag. 206. e seg.) che l' ultimo infinitesimo termine di una progressione geometrica decrescente si è la cifra zero. *Si definiscono i logaritmi, (pag. 216.) e, si spiega l' indole, e la proprietà di essi; e trovasi per ag-*

giunta il calcolo de' numeri decimali (pag. 217., e ſeg.).

Nel ſecondo ſi dimoſtrano le proprietà, e gli accidenti delle linee rette, degli angoli piani rettilinei, delle linee parallele, l' uguaglianza, e la diverſità dei triangoli rettilinei, e dei parallelogrammi, e la coſtruzione, e la miſura di eſſi; nel corollario terzo della definizione 36. ſi trova una ſufficiente notizia delle miſure, di cui comunemente ci ſerviamo per miſurare ogni lunghezza, e ſuperficie, le definizioni ſono ſeguitate da cinque altri aſſiomi.

Nel terzo libro con ſomma chiarezza, e brevità vengono dimoſtrate le proprietà delle linee rette proporzionali, e delle figure piane rettilinee ſimili.

Il quarto contiene le principali proprietà, ed accidenti delle linee rette, che toccano, o ſegano il circolo, e degli angoli formati da eſſe dentro, e fuori del medeſimo; nella definizione decima, e ne' ſuoi corollari evvi un ſaggio de' principi, e delle propoſizioni fondamentali della trigonometria piana, colla nozione delle tavole trigonometriche.

Nel quinto trattaſi della iſcrizione, e circoſcrizione de' triangoli, e delle altre figure piane rettilinee nel cerchio; della coſtruzione, e della miſura delle figure piane regolari, e della miſura, e diviſione del circolo ne' ſuoi gradi.

Il ſeſto libro contiene la ſcienza de' ſolidi in cui ſi dimoſtrano le più utili, e neceſſarie proprietà de' priſmi, de' cilindri, delle piramidi, de' coni, della sfera, e s' inſegnano le regole di miſurare la ſuperficie, e ſolidità di ciaſcuna d' eſſe figure; e nell' annotazione della propoſizione 20. ſono indicate le miſure da noi adoperate per miſurare i ſolidi.

Nel ſettimo libro poi con metodo chiaro, e facile ſi dimoſtrano le principali proprietà della elliſſe, delle evolute, ed evolventi, della cicloide, della parabola, e dell' iperbola, e de' ſolidi da queſte figure generati, e la maniera di deſcrivere, e miſurare le medeſime.

ERRORI		CORREZIONI
52	lin. 18 come del aritmetica	come nell' aritmetica
104	lin. ult. x la (quale	x (la quale
147	19 $\frac{a}{2}\sqrt[3]{m}$	$\frac{a}{2}\sqrt[3]{m}$
227	11 43875	4375

IMPRIMATUR

F. Vincentius Maria Carras Ord. Præd.
S. T. M. Vic. Gen. S. Officii Taurini.

V. Canonica LL. AA. Præses.

V. Se ne permette la ſtampa.

di ferrere per S. E. il Sig. Conte Caissotti
di Santa Vittoria Gran Cancelliere.

NOZIONI PRELIMINARI.

I. La *definizione* è un discorso, il quale spiega o la natura di qualche cosa, o il vocabolo di cui ci serviamo per significarla.

Le definizioni si dividono in reali, e nominali.

Definizioni reali diconsi quelle, le quali esprimono il modo, col quale vengono formate quelle cose, che si definiscono.

Definizioni nominali chiamansi quelle, che contengono un numero sufficiente di quelle proprietà, le quali appartengono alle cose, di cui si tratta, da poterle facilmente distinguere dalle altre cose dello stesso genere.

II. La *proposizione* è un discorso, col quale si rappresenta alla mente nostra qualche cosa da contemplare; ovvero si espone, che alcuna cosa conviene, o non conviene al soggetto, di cui si tratta.

Due sono le parti di ogni proposizione, cioè l'*ipotesi*, o *supposizione*, e la *tesi*, o *quistione*.

L' *ipotesi*, la quale dicesi ancora il *dato*, o *supposto* della proposizione, contiene le condizioni, colle quali si afferma, o si nega qualche cosa.

La *tesi* poi, o ſia il *quesito* della propoſizione, contiene tutto ciò, che ſi afferma, o ſi nega.

III. *Teorema* ſi chiama quella propoſizione, nella quale ſi propone qualche coſa da dimoſtrare.

Le parti principali del teorema ſono la *proposizione*, nella quale ſi enuncia ciò, che ſotto certe condizioni può convenire, o non convenire ad una coſa; e la *dimoſtrazione*, nella quale ſi eſpongono le ragioni, per le quali la noſtra mente conchiude ſe ciò convenga alla data coſa, o no.

IV. *Problema* ſi addimanda ogni propoſizione, nella quale ſi comanda qualche coſa da fare.

Il problema è compoſto di tre parti principali, le quali ſono:

La *proposizione*, nella quale ſi enuncia ciò, che ſi dee fare;

La *riſoluzione*, o *coſtruzione*, nella quale con ordine chiaro, e preciſo s' inſegnano ad una ad una tutte le azioni da farſi per eſeguire quanto è ſtato propoſto;

E la *dimoſtrazione*, nella quale fatto ciò, che ſi è preſcritto, con ragioni ſi convince l' intelletto d' aver fatto quanto fù comandato.

AVVERTIMENTO.

Alcuni teoremi abbiſognano eziandio di coſtruzione per poter dimoſtrare le propoſte verità, come ſoventemente ſi vedrà in queſti elementi.

V. *Lemma* si noma quella proposizione, la quale serve per dimostrare alcuna proposizione generale, alla quale si premette col titolo di lemma per non interrompere la serie delle proposizioni principali.

VI. *Assioma* è un teorema così chiaro, ed evidente, che non ha bisogno di veruna dimostrazione.

VII. *Postulato*, o *dimanda concedibile* è un problema cotanto facile, che non richiede veruna risoluzione, nè dimostrazione.

VIII. *Corollario* dicesi una proposizione, la quale facilmente si deduce da qualche definizione, o da un' altra proposizione già dimostrata; ovveramente il corollario è un' applicazione di una proposizione generale ad un caso particolare.

IX. *Annotazione*, da' Greci detta *scholion*, chiamasi ciò, che si mette dopo le definizioni, o dopo le proposizioni, o corollari, quando contengono qualche cosa degna di particolare osservazione, o che abbia bisogno di qualche rischiaramento.

X. *Quantità*, o *grandezza* dicesi tutto ciò, che è diviso, o si concepisce divisibile in parti; o sia tutto ciò, che si può accrescere, o sminuire; di questa sorta sono il corpo, la superficie, la linea, il tempo, il moto, la velocità, il numero, il peso, la misura ec. Dividesi la quantità in discreta, e continua.

XI. *Discreta*, o *disgiunta* si chiama quella *quantità*, la quale è composta da parti separate e disgiunte, come il numero, il quale è composto dalle unità.

XII. *Quantità continua*, o *continuo* è quella, le cui parti sono insieme unite, connesse, e tra di loro congiunte. Di questo genere sono il corpo, la superficie, e la linea.

XIII. La *Geometria* è quella scienza, nella quale si considerano, e si dimostrano le proprietà della quantità continua; ovveramente si puó definire, la scienza delle cose, che hanno estensione, in quanto che sono terminate; in essa cioè si esaminano, e si dimostrano tutte le proprietà, e gli accidenti delle linee terminate, delle superficie, e de' corpi circoscritti da' termini, non già estesi in infinito.

XIV. *Aritmetica* si noma quella scienza, in cui si dimostrano le proprietà, e i principali uffizi della quantità discreta, o diciamo de' numeri.

L' arte poi di calcolare, o far conti co' numeri dicesi *Aritmetica volgare*, o *pratica*.

XV. *Aritmetica speciosa*, *Aritmetica letterale*, o *Algebra speciosa*, o *calcolo Algebraico* si dice quella scienza, nella quale s' insegna la maniera di calcolare le specie, cioè le lettere dell' alfabeto, e con esso calcolo si dimostrano con mirabile facilità moltissime proprietà tanto della quantità continua, quanto della discreta, ed agevolmente si risolvono le più intrigate quistioni dell' Aritmetica, e della Geometria.

XVI. *Aritmetica universale* addimandasi quella scienza, nella quale unitamente s' insegnano amendue le arti di calcolare, cioè la numerica, e la speciosa, o letterale.

ELEMENTI

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE.

LIBRO PRIMO

DEL CALCOLO DEGLI INTERI.

DEFINIZIONE I.

1. Unità è quella denominazione, per la quale qualsivoglia cosa si dice *una*.

2. ANNOTAZIONE. *Uno*, o unità si dice tutto ciò, che è, o si concepisce essere indiviso in se stesso, e diviso da ogni altra cosa; perciò ogni quantità anche composta di molte parti, se si considera indivisa in se stessa, e divisa da qualunque altra cosa, chiamasi *una*. Vi sono dunque due sorta di unità, altre, cioè, sono in se stesse indivisibili, e si addimandano *unità d'indivisibilità assoluta*, come sarebbero le monadi di Leibnizio, e i punti zenonici, se pure esistono; altre poi sono composte di più parti, o di più cose, e diconsi *unità di aggregato*; come qualunque numero benchè composto di moltissime unità, considerato in se stesso dicesi *uno*.

DEFINIZIONE II.

3. Il *numero* è un compleſſo, o aggregato, o ſia unione di due, o più unità.

4. COROLLARIO. Dunque l' unità non è numero, ma bensì il principio d' ogni numero. Laonde il primo numero è il due, il ſecondo è il tre ec. comunemente peró l'unità ſi conta tra i numeri.

DEFINIZIONE III.

5. I nomi, di cui ci ſerviamo per contare, o ſia numerare le coſe ſono *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *ſei*, *ſette*, *otto*, *nove*, *dieci*; cioè dieci unità, compongono una *decina*; due decine, diconſi *venti*; tre, chiamanſi *trenta*; quattro decine, appellanſi *quaranta*, cinque, *cinquanta*; ſei, *ſeſſanta*; ſette, *ſettanta*; otto, *ottanta*; nove, *novanta*; e dieci decine ſi chiamano *cento*; dieci centinaia, ſi dicono *mille*, o *migliaio*, o *mila*; dieci volte cento mila, o mille volte mille, compongono un *milione*; dieci volte cento mila milioni, formano un milione di milioni, o diciamo un *bilione*; dieci volte cento mila bilioni, fanno un *trilione*; dieci volte cento mila trilioni, fanno un *quadrilione*; e così ſucceſſivamente dai quadrilioni ſi formano i *quintilioni*, e da queſti i *ſeſtilioni* ec.

Quando poi nel contare ſi arriva ad un numero di decina, allora ſi ricominci di nuovo la numerazione, ma inſieme ripetaſi il numero della ſteſſa decina; per eſempio dieci più uno, diceſi *undici*; dieci e due fa *dodici*; venti più uno, ſi dice *ventuno*; venti più tre, *ventitrè*; trenta più cinque, *trentacinque*; cento ottanta più uno, *centottantuno* ec.

DEFINIZIONE IV.

6. I primi dieci numeri, comprefovi l'uno, fi dicono *unità*, ovvero *numeri digiti*.

Il numero dieci, ed i fuoi moltiplici, cioè il venti, il trenta, il quaranta ec. chiamanfi numeri *articoli*.

Inoltre i numeri minori del dieci fi nomano *numeri femplici*; ed i numeri maggiori del nove, diconfi *numeri compofti*.

DEFINIZIONE V.

7. Le *note*, o *fegni*, o diciam *figure*, o *caratteri*, di cui ci ferviamo nell' aritmetica volgare per efprimere qualfivoglia numero, fono: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le quali fignificano *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *fei*, *fette*, *otto*, *nove*; ed a quefte fi aggiunge la cifra *zero*, cioè *o*, la quale per fe fteffa niente fignifica, ferve bensì a riempiere le fedi vacue, come vedremo in appreffo; e pofta alla deftra di qualunque altra nota (quando diciamo *alla deftra*, o *alla finiftra*, fempre fi dee intendere *di chi fcrive*) la rende dieci volte maggiore; così 10, fignifica *dieci*; 20 efprime *venti*; 30, indica *trenta*; 70, vale *fettanta*, ec.

Ma acciocchè colle fopradette dieci figure aritmetiche fi efprima qualunque numero di cofe quantunque grandiffimo, fi dee fapere, che le fuddette figure, oltre al proprio valore ftato loro affegnato dagli inventori di effe, ne hanno un altro, il quale viene determinato dal luogo, o fia fede, in cui fono pofte, nella feguente maniera.

Qualfivoglia figura aritmetica trovandofi fola, o pofta in primo luogo alla deftra, fignifica femplici unità; ma effendo pofta alla finiftra di un' altra, cioè nella fe-

conda ſede, allora ſignifica tante decine, quante unità eſprime eſſendo ſola; e procedendo ſempre dalla deſtra verſo la ſiniſtra di chi ſcrive, una figura poſta nella terza ſede, o ſia in terzo luogo, ſignifica tante centinaia, quante unità indica, quando è ſola; ſe ſarà collocata nella quarta ſede, eſprimerà unità di migliaia; nella quinta, ſignifica decine di migliaia; nella ſeſta, contiene centinaia di migliaia; nella ſettima ſede, ſignifica unità di *milioni*; nell' ottava, indica decine di milioni; nella nona, eſprime centinaia di milioni; nella decima ſede, ſignifica migliaia di milioni; nell' undiceſima, contiene decine delle migliaia di milioni; e nella dodiceſima ſede, ſignifica centinaia delle migliaia di milioni. Poſcia continovando collo ſteſſo ordine, nelle ſei ſuſſeguenti ſedi ſono poſte le unità, decine, centinaia, migliaia, decine di migliaia, e centinaia di migliaia de' bilioni. Di poi, ſei ſedi, ſi aſcrivono ai trilioni; ſei altre, ai quadrilioni; indi altre ſei ai quintilioni, e così proſeguendo all' infinito.

In quelle ſedi poi, le quali non hanno veruno de' numeri ſemplici (definizione antecedente) ſempre ſi metta la cifra o.

Per eſempio A
134728659.

La prima figura 9 del numero A, significa nove ſemplici unità; la ſeconda 5, eſprime cinque decine, cioè 50, *cinquanta* di quelle medeſime unità, o coſe, che si numerano; la terza 6, indica ſei centinaia, vale a dire 600, *ſecento*; la quarta 8, significa 8000, *ottomila* delle ſteſſe unità; la quinta 2, eſprime due decine di migliaia, cioè 20000, *ventimila*; la ſeſta 7 vale ſette centinaia di migliaia, cioè a dire 700000, *ſettecento mila*; la ſettima 4, significa 4000000, *quattro milioni*; l' ottava 3, eſprime tre decine di milio-

ni, 30000000, cioè *trenta milioni*; e la nona figura 1 significa un centinaio di milioni, vale a dire 100000000. *cento milioni*; conseguentemente il suddetto numero A significa cento trentaquattro milioni settecento ventotto mila secento cinquanta nove.

Similmente la prima figura 7 del numero B, significa sette semplici unità; la seconda, che è la cifra 0, indica, che il dato numero B, non ha veruna decina; e la terza figura 4 significa *quattro centinaia*, cioè 400, *quattrocento*. Conseguentemente il numero B, esprime quattrocento sette.

B
407

Da quanto finora si è detto in questa definizione, sarà cosa facile lo esprimere con figure aritmetiche qualunque numero. Sia, verbi grazia, il numero secento mila ottocento sette da esprimersi colle suddette figure. Questo numero contiene sette unità, perciò scrivasi la figura 7 nella prima sede; e perchè non ha veruna decina, si scriva 0 nella seconda sede; indi mettasi la figura 8 nella terza sede, ove significa le otto centinaia; poscia perchè esso numero non contiene nè unità, nè decine di mila, scrivasi 0 nella quarta sede; ed un altro 0 nella quinta; e finalmente si metta la figura 6 nella sesta sede, in cui significa le sei centinaia di mila, e però il suddetto numero si scriverà così 600807.

Similmente il numero quarantotto milioni novecento cinquantatre mila secento settanta si scriverà in questo modo 48953670. ec.

8. ANNOTAZIONE. Le sopradette figure aritmetiche si dicono ancora *figure arabiche*, perchè volgarmente si crede, che gl' inventori di esse sieno stati gli Arabi; ma da uomini eruditissimi l' invenzione di esse figure viene attribuita agl' Indiani, e che da questi le abbiano ricevute gli Arabi. I Saraceni poi le portarono

dall' Arabia nella Spagna; ed il dottiſſimo Gerberto Monaco di Fleury, il quale fu poſcia nell' anno 999. creato Papa col nome di Silveſtro II., le introduſſe nella Francia, e nelle altre provincie d'Europa.

Oltre alle ſuddette figure aritmetiche, ſono preſentemente ancora in uſo, per ſemplicemente notare i numeri, quelle lettere, di cui ſervivanſi gli antichi Romani per eſprimere li loro numeri, e ſono le ſette ſeguenti:

uno,	cinque,	dieci,	cinquanta,	cento,	cinquecento,	mille,
I.	V.	X.	L.	C.	D.	M.

le quali variamente unite eſprimono qualſiſia numero; avvertendo però, nel leggerli, di ſottrarre dalla ſeguente, l'antecedente di minor valore, come chiaramente ſi vede ne' ſeguenti numeri:

uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	ſei,	ſette,	otto,
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.

nove,	dieci,	undici,	dodici,	tredici,	quattordici,
IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.

quindici,	ſedici,	diciaſſette,	diciotto,	diciannove,
XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.

venti,	trenta,	quaranta,	cinquanta,	ſeſſanta,	novanta,
XX.	XXX.	XL.	L.	LX.	XC.

cento,	dugento,	quattrocento,	cinquecento,	ſecento,
C.	CC.	CD.	D, o IↃ.	DC.

novecento,	mille,	cinque mila,	dieci mila,	cinquanta mila,	cento mila.
CM.	M. oppure CIↃ.	IↃↃ.	CCIↃↃ.	IↃↃↃ.	CCCIↃↃↃ.

Oltreciò per maggior brevità tirando una lineetta traſverſa ſopra qualunque delle ſuddette lettere ſignificherà migliaia. Così $\overline{I}$ ſignifica mille, $\overline{V}$. cinque mila, $\overline{X}$. dieci mila, $\overline{C}$. cento mila, $\overline{IV}$. quattro mila ec.

DEFINIZIONE VI.

9. *Numero intero razionale, o volgare* dicesi quello, che contiene intere unità; ovvero è quello, il quale si riferisce all' unità, come il tutto ad una sua parte.

DEFINIZIONE VII.

10. *Numero rotto razionale, o volgare,* il quale dicesi ancora *frazione*, è quello, il quale contiene una, o più parti dell' unità; oppure dicesi quello, il quale si riferisce all' unità, come la parte al tutto.

DEFINIZIONE VIII.

11. Per esprimere qualsivoglia frazione, ci serviamo di due numeri, scrivendo l'uno sotto dell' altro, frapponendovi una lineetta tramezzo. Così per indicare la terza parte di qualunque cosa scrivesi $\frac{1}{3}$, e si legge *un terzo*, ovvero *uno diviso per tre*. Similmente volendo esprimere quattro quinte parti di qualsivoglia quantità si scrive $\frac{4}{5}$, e leggesi *quattro quinti*, , o *quattro diviso per cinque*, o pure *quattro quinte parti* del dato intero.

Il numero, che si pone sotto la lineetta chiamasi *denominatore della frazione*, e indica in quante parti sia diviso, o debbasi dividere quell' intero dato, che prendesi per unità, e l' altro numero scritto sopra la lineetta dicesi *numeratore della frazione*, perchè numera le parti, che dal dato intero diviso bisogna prendere.

Così nella frazione $\frac{4}{5}$ il denominatore 5 significa, che il dato intero è diviſo in cinque parti uguali; ed il numeratore 4 indica, che delle ſuddette cinque parti quattro ſole debbonsi prendere nel dato caſo.

DEFINIZIONE IX.

12. Ogni numero compoſto d' un intero, e di un rotto, *numero miſto* si noma. Così $7\frac{2}{3}$ è un numero miſto, e significa ſette interi con due terze parti d' un intero.

DEFINIZIONE X.

13. Numeri uguali diconsi quelli, i quali contengono lo ſteſſo numero di unità, o di parti dell' unità. Per eſempio i due numeri tre, e quattro insieme presi ſono uguali al numero ſette.

Similmente i due numeri miſti $4\frac{3}{5}$, e $6\frac{1}{5}$ uguagliano il numero miſto, $10\frac{4}{5}$, dieci e quattro quinti.

Diſuguali poi ſi chiamano i *numeri*, che non contengono lo ſteſſo numero di unità, o di parti dell' unità; quali ſono i due numeri 6, ed 8, al primo de' quali mancano due unità per uguagliare il ſecondo, il quale è uguale al 6 più 2; conſeguentemente l' uno de' due numeri diſuguali, è uguale ad una parte dell' altro, e ſi dice *numero minore*; ma l' altro, una parte del quale uguaglia il minore, diceſi *numero maggiore*.

DEFINIZIONE XI.

14. S*ommare*, *o far l' addizione*, è raccogliere in una somma due, o più numeri dati; ovvero dati due, o più numeri, è trovarne un altro, il quale sia uguale a tutti i numeri dati, presi insieme.

In questa prima operazione aritmetica i numeri dati si dicono *numeri da sommarsi*, e quello, che si cerca, nomasi *somma de' numeri dati*; così il 7, è la somma dei numeri dati 3, 4., perchè contiene tante unità, quante ne contengono i dati numeri 3, 4, insieme presi.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{3} \\ 7 \end{array}$$

DEFINIZIONE XII.

15. La sottrazione è la seconda operazione dell' Aritmetica, permezzo della quale si ritrova la differenza tra due numeri dati, o tra due quantità date; vale a dire colla sottrazione si ritrova l' eccesso del numero maggiore sopra del minore; ovvero ritrovasi ciò, che manca al minore per uguagliare il maggiore.

Dei numeri dati quello, che si dee sottrarre, chiamasi *numero sottraendo*, e l' altro, dal quale si fa la sottrazione, dicesi *numero minuendo*; ed il numero, che per mezzo della sottrazione si ritrova, chiamasi *differenza*, *o residuo della sottrazione*; come dal 9. sottraendo il 5, sarà il residuo, o differenza il 4.

$$\begin{array}{r} 9 \\ \underline{5} \\ 4 \end{array}$$

16. COROLLARIO. Da questa definizione chiaramente ne segue, che il residuo aggiunto al numero sottraendo, fa una somma uguale al numero minuendo. Come nell' antecedente esempio, la somma del residuo 4 col numero sottratto 5, restituisce il numero minuendo 9.

DEFINIZIONE XIII.

17. *La moltiplicazione*, terza operazione dell' Aritmetica, altro non è, che, dati due numeri, ritrovarne un terzo, il quale contenga tante volte uno de' dati numeri, quante unità, o parti dell' unità sono contenute nell' altro dato numero.

I numeri dati diconsi *moltiplicatori*, e quel numero, che per mezzo della moltiplicazione di essi si ritrova; chiamasi *prodotto*. Dei moltiplicatori poi quello, che alcune volte si ripete, si dice *numero moltiplicando*, e l' altro, il quale esprime quante volte si debba ripetere il moltiplicando, dicesi *moltiplicatore.* Come moltiplicando il 4 per 3, il prodotto si è 12, il quale tante volte contiene il moltiplicando 4, quante unità contiene il moltiplicatore 3.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{3} \\ 12 \end{array}$$

18. COROLLARIO. Da quanto si è detto in questa definizione, facilmente si può conchiudere, che in ogni moltiplicazione, il prodotto, tante volte contiene l' uno de' moltiplicatori, quante volte l' altro contiene l' unità; ovvero che il prodotto ha lo stesso rapporto all' uno de' moltiplicatori, che l' altro moltiplicatore ha all' unità. Inoltre egli è evidente, che la moltiplicazione è una compendiosa addizione dello stesso numero; così 4 più 4 più 4. fanno la somma 12 uguale al prodotto del 4 moltiplicato per 3.

DEFINIZIONE XIV.

19. *La divisione* è la quarta operazione dell' aritmetica, permezzo della quale si ritrova quante volte un dato numero sia contenuto in un altro numero dato.

Altrimenti, si definisce, la divisione essere il ritrovare un numero, il quale contenga tante volte l' unità, quante l' uno de' numeri dati contiene l' altro dato numero.

De' due dati numeri quello, che si dee dividere, chiamasi *numero dividendo*; e l' altro, col quale si fa la divisione, dicesi *numero divisore*; quel numero poi, il quale si ritrova colla divisione, si noma *quoziente* della divisione.

Come dividendo il numero 15 pel 5, il quoziente è 3; perchè il 3 tante volte contiene l' unità, quante il dividendo 15 contiene il divisore 5.

$$15 \,|\, \underline{5}\quad 3$$

DEFINIZIONE XV.

20. Numero pari è quello, il quale si può dividere in due parti uguali, e amendue composte d' intere unità; o sia quello, la cui metà è un numero intero.

I numeri pari sono 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ec.

Numero dispari, o casso dicesi quello, il quale differisce dell' unità dal numero pari; cioè quello la cui metà è un numero misto. Dispari sono i numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ec.

DEFINIZIONE XVI.

21. Nell' aritmetica litterale, o speciosa, per esprimere qualunque quantità discreta, o continua, ci serviamo delle lettere minuscole dell' alfabeto *a*, *b*, *c* ec. imperciocchè qualsivoglia numero grande, o piccolo, intero, o rotto, o misto si può chiamare *numero* a, ovvero *numero* b, oppure *numero* m ec.

Medesimamente qualunque linea nomare si può linea *a*, o linea *c*, oppure linea *g* ec. Lo stesso si dee intendere di qualunque altra quantità.

I Geometri per maggior facilità di calcolare si servono delle prime lettere dell' alfabeto a, b, c, f, g ec. per esprimere le quantità cognite, e date in una quistione proposta; e delle ultime lettere t, v, x, y, z, si vagliono per denotare le incognite quantità, che in essa quistione si cercano; anzi chiamano quantità le stesse lettere di cui si servono, per dimostrare i teoremi, o risolvere i problemi.

Inoltre sogliono esprimere le quantità indeterminate, e di valore arbitrario colle lettere m, n; e nel calcolo infinitesimale della lettera d non mai si servono, se non che per indicare le differenze di quelle quantità, le quali non sono costanti, ma continuamente crescono, o diminuiscono, e perciò diconsi *quantità variabili*.

DEFINIZIONE XVII.

22. Qualora in una questione qualsivoglia quantità è stata denominata, per esempio, a, in tal caso il doppio di essa si esprimerà per $2a$, il triplo scrivendo $3a$ ec.

Similmente $5m$ significa il quintuplo della grandezza m ec.

Inoltre la metà della stessa quantità a, si esprimerà scrivendo $\frac{1}{2}a$ ovvero $\frac{a}{2}$; la terza parte collo scrivere $\frac{1}{3}a$, o pure $\frac{a}{3}$ ec. lo stesso s' intenda di ogni altra quantità.

DEFINIZIONE XVIII.

23. Ogni numero immediatamente prefisso ad una quantità litterale si chiama *coefficiente* della medesima

quantità, e significa quante volte si debba prendere essa quantità. Così $4m$ significa quattro volte la quantità m; $3a$ significa tre volte la grandezza a; $\frac{1}{4}a$ esprime la quarta parte di a; di modo che, se a significa il numero 12, allora $3a$ significherà 36 triplo del 12; ed $\frac{1}{4}a$ esprimerà il numero 3, quarta parte dello stesso 12; or questi numeri 4, 3, $\frac{1}{4}$ sono coefficienti della quantità m, ed a, e così degli altri.

24. Quelle quantità letterali, le quali non hanno verun coefficiente, sempre s' intendono avere l' unità prefissa; come a significa $1a$; m vale $1m$; cx vale $1cx$, ec.

DEFINIZIONE XIX.

25. Le quantità altre sono *positive*, o *affermative*, ed altre diconsi, *negative*, o *privative*.

Gli averi, i crediti, i guadagni, le vincite ec. si nomano quantità positive; i debiti poi, le perdite ec. si dicono quantità negative.

Le quantità positive sogliono anche chiamarsi maggiori del nulla, le negative si dicono minori dello stesso nulla; perciocchè lo zero, o sia il nulla aggiunto, o tolto da qualsivoglia quantità non l'accresce, nè la diminuisce; onde tutto ció, che aggiunto ad una quantità l'accresce, dicesi maggiore del nulla; e ció, che aggiunto alla quantità la scema di valore, si dice minore del nulla; perció la quantità positiva sarà maggiore del nulla, e la negativa sarà minore dello stesso nulla.

Per altro le quantità diconsi maggiori, o minori del nulla, le une relativamente alle altre, non già considerate in se stesse, perchè ogni quantità considerata in se medesima sempre è positiva, e maggiore del nulla.

Le suddette quantità sono tra di loro opposte, e vicendevolmente si distruggono, quando insieme si uniscono.

Supponiamo, per esempio, che Andronico abbia un capitale di cento doppie, e che in un negozio ne guadagni altre cento, allora si troverà avere quantità positiva di cento più cento, cioè di dugento doppie; ma se in vece di guadagnare cento doppie, le perderà in quel negozio, in questo caso rimarrà il suo capitale cento doppie meno cento doppie, uguale allo zero. Finalmente se avendo le cento doppie, noi supponghiamo, che ne abbia perdute, o fatto un debito di cento dodici, in questo caso il suo avere sarà una quantità negativa di cento meno cento dodici doppie, cioè di dodici doppie meno del nulla; vale a dire, resterà senza verun capitale, con dodici doppie di debito.

DEFINIZIONE XX.

26. *Quantità omogenee, o dello stesso genere*, sono quelle, delle quali prendendone una alcune volte, può uguagliare, o superare l' altra; ovveramente sono quelle, una delle quali sottratta dall' altra una o più volte, lascia niun avanzo, o un avanzo minore della quantità sottratta; conseguentemente le quantità omogenee paragonate tra di loro sempre sono uguali, o disuguali.

Per esempio la linea A ——ı——ı—— di tre piedi di lunghezza, e la linea B ——ı—— lunga

due piedi ſono quantità omogenee, perchè la linea B preſa due volte ſupera la linea A.

Eterogenee, o di diverſo genere diconſi quelle quantità, delle quali preſane una quante volte piace, non ſi puó dire che uguagli, o ſuperi l' altra, e non poſſono dirſi tra di loro uguali, nè diſuguali; come un numero, ed una linea ſono quantità eterogenee, perchè non puó il numero eſſere uguale, nè minore, nè maggiore della linea.

DEFINIZIONE XXI.

27. *Uguali* ſi chiamano quelle *coſe*, delle quali ſi puó ſoſtituire una in vece dell' altra ſenza variarne la quantità; ovvero quantità uguali ſono quelle, le quali hanno il medeſimo valore, o la ſteſſa eſtenſione; per eſempio ſe a ſignifica tre lire noſtrali di argento, ed m ſignifichi una ſomma di ſeſſanta ſoldi noſtrali, allora ſarà a uguale alla m, perchè tre lire noſtrali d' argento equivagliono a ſeſſanta ſoldi.

Diſuguali ſi dicono quelle *coſe*, delle quali una è uguale ad una parte dell' altra.

DEFINIZIONE XXII.

28. Nelle operazioni dell' Aritmetica univerſale, per maggior facilità, e chiarezza del calcolo ci ſerviamo di diverſi ſegni, e principalmente de' ſeguenti, $+$, $-$, $\times$, $=$, $>$, $<$ ec., i quali si nomano *più*, *meno*, *moltiplicato*, *uguale*, *maggiore*, *minore*.

29. Del ſegno $+$, *più*, ci ſerviamo per ſegnare le quantità poſitive; ed è il ſegno della ſomma di eſſe. Così $5+2$, che leggesi *cinque più due*, significa 7, che è la ſomma de' numeri cinque, e due.

Similmente $a+b$, che si legge *a* più *b*, esprime la somma delle due quantità *a*, *b*; di modo che se *a* significherà il 7, ed il *b* indichi il 5, allora $a+b$ significherà $7+5$, cioè 12.

30. Il segno $-$, *meno*, serve a dinotare le quantità negative, ed è il segno della sottrazione delle quantità positive. Come volendo sottrarre il 2 dal 6, si può esprimere il residuo 4 scrivendo $6-2$, e leggesi *sei meno due*.

Parimente $a-c$, cioè a *meno* *c*, significa il residuo, che nasce sottraendo il *c* dall' *a*. Se per esempio *a* sia 8, e *c* significhi 3, in tal caso $a-c$ significherà $8-3$, cioè 5.

31. Questo segno $\times$, *moltiplicato* serve per indicare la moltiplicazione delle quantità, come scrivendo 3×4, che si legge *tre moltiplicato quattro*, si denota il prodotto 12, che nasce dal moltiplicare il 3 pel 4.

Similmente $a\times b$, *a moltiplicato b* significa il prodotto, che si fa moltiplicando l' *a* per *b*; di maniera che se *a* vale 2, e *b* significhi 9, allora $a\times b$ significherà 2×9, cioè 18.

Molti però invece del suddetto segno della moltiplicazione mettono un solo punto tra le due quantità da moltiplicarsi. Così $a.b$ significa *a* moltiplicato per *b*. Similmente 3.4 significa *tre moltiplicato per quattro*, cioè 12. ec.

32. Il segno $=$, *uguale* è il segno d' uguaglianza, il quale serve a paragonare tra di loro le quantità uguali. Per esempio volendo indicare, che la somma del 3 col 2 è uguale al 5, si scrive $3+2=5$, e si legge *tre più due uguale* 5.

Medesimamente scrivendo $a=b$, cioè *a uguale b*, si esprime, che nel dato caso le due quantità *b*, ed *a* sono tra di loro uguali. Similmente $c=4$ significa, che il valore della *c* è 4.

33. Quando tra di loro si deono paragonare due quantità diſuguali, ci ſerviamo di queſti due ſegni $>$, *maggiore*, e $<$, *minore*. Come volendo eſprimere, che il numero 8 è maggiore del numero 5 ſcrivesi $8>5$, e si legge *otto maggiore di cinque*.

Parimente $a>c$, cioè *a maggiore* di *c* indica, che il valore di *a* è maggiore del valore di *c*.

Ma dovendo significare, che il 5 è minore del 8, si ſcriva $5<8$, che leggesi *cinque minore di otto*. Similmente $c<m$, cioè *c minore* di *m*, indica, che nel dato caſo la quantità *c* è minore della quantità *m*.

34. La diviſione delle quantità qualche volta si eſprime a modo di frazione (n. 11.) mettendo cioè il diviſore ſotto il dividendo, interponendovi una lineetta. Così volendo dividere il 12 pel 4, il quoziente 3 si può eſprimere ſcrivendo $\frac{12}{4}$, che leggesi *dodici diviſo quattro*, ovvero *dodici quarti*; perciocchè dodici quarte parti di qualunque intero, formano tre interi.

Similmente $\frac{a}{m}$, cioè *a diviſo m*, significa il quoziente, che naſce dividendo *a* per *m*; di modo che ſe *a* ſarà 15, e la *m* significhi 5, allora $\frac{a}{m}$ significherà $\frac{15}{5}$, cioè 3.

Inoltre la diviſione si eſprime ancora mettendo due punti tra il dividendo, e 'l diviſore. Così $a:m$ significa *a* diviſo per *m*. Medesimamente $12:4$ vale lo ſteſſo, che $\frac{12}{4}$, cioè significa il quoziente 3, che si ritrova dividendo il 12 per 4.

35. ANNOTAZIONE. I due ſegni +, e − ſono contrari, ed oppoſti, perchè col ſegno + ſi notano le quantità poſitive, e col ſegno − le negative. Quelle quantità ſole, o iniziali, le quali non hanno verun ſegno +, nè − prefiſſo, ſempre si intendono avere prefiſſo il ſegno +. Così a ſignifica $+a$; m vale $+m$; $a+b-c$ ſignifica $+a+b-c$ ec. Ma alle quantità negative ſempre ſi dee preporre il ſegno −.

DEFINIZIONE XXIII.

36. Quelle *quantità*, le quali non ſono inſieme conneſſe dai ſegni +, e −, che ſono di un ſolo termine, ſi chiamano *ſemplici*, o *incompleſſe*, o *monomie*, come ſono a, m, abm, $\frac{a}{c}$, $-b$, $-ax$ ec.

Ma le quantità, le quali ſono inſieme unite, e congiunte dai ſegni +, e −, che ſono di due, o più termini, diconſi *quantità compleſſe*, o *polinomie*; quali ſono $a+b$, $a-c+m$ ec.

Ogni quantità compoſta di due termini, o membri, diceſi *binomio*, come il binomio $a+b$, ovvero $c-m$, o $5+2$ ec.

Se ſarà compoſta di tre termini, ſi dice *trinomio*, come $a+b-c$, ovvero $b-m-x$ ec.

Se di quattro termini, ſi dirà *quadrinomio*, come $a-m-b+x$, ec.

PROBLEMA I.

37. Leggere qualſivoglia numero deſcritto colle figure aritmetiche.

RISOLUZIONE. I. Incominciando dalla parte deſtra, e procedendo verſo la ſiniſtra di chi legge, ſi divida

il dato numero in ternarii, cioè in membri, ciaſcuno de' quali contenga tre figure, eccettuatone l' ultimo, il quale può rimanere di due, o di una ſola figura.

2. Quando il dato numero contiene più di ſei figure, allora ſopra la ſettima ſcrivaſi un piccol 1; indi verſo ſiniſtra, numerate altre cinque figure, ſopra la ſeſta poſta nella trediceſima ſede, ſi metta un piccol 2, e così proſeguendo, frappoſte ſempre cinque figure, ſi ſcrivano le note 3, 4, 5 ec. ſopra le figure, che troverannoſi poſte nella diciannoveſima, venticinqueſima, e trentuneſima ſede ec. Così facendo, il numero dato rimarrà diviſo in ſenari, o membri, ciaſcuno de' quali conterrà ſei figure, eccettuatone l' ultimo, il quale trovandoſi primo alla ſiniſtra può avere un minor numero di figure, e qualche volta una ſola.

Poſcia ciaſcun ſenario ſi divida con una virgola in due ternarii; il primo de' quali verſo la deſtra contiene ſempre le unità, le decine, e le centinaia dello ſteſſo ſenario; e l'altro ternario poſto verſo la ſiniſtra, contiene le migliaia, o ſia le unità di mila, le decine di mila, e le centinaia di mila del medeſimo ſenario.

Inoltre, da quanto ſi è detto nella definizione quinta poſta al numero 7, chiaramente ſi vede, che il primo ſenario alla deſtra contiene le unità, il ſecondo contiene i milioni, il terzo i bilioni, il quarto ſenario i trilioni; e ſempre andando verſo la ſiniſtra, il quinto ſenario contiene i quadrilioni, il ſeſto i quintilioni, e così proſeguendo.

Finalmente il numero ſi legge cominciando dalla parte ſiniſtra, e procedendo verſo la deſtra, ed ove in leggendo s'incontrano le virgole, ſi dee pronunciare la parola *mila*, o *mille*: perchè colà terminano le migliaia di quel ſenario; ed i numeri ſoprappoſti 1, 2, 3 ec. ſignificano milioni, bilioni, trilioni, e così di mano

in mano. Le quali coſe tutte più facilmente s' intenderanno dai ſeguenti eſempi; imperciocchè, come ſcriſſe il dottiſſimo Cavaliere Iſacco Newton, *le arti più facilmente s' imparano dagli eſempi, che dai precetti.*

Siano dati i numeri A, B, C, D, i quali ſi dividano in membri, come ſi è detto poc' anzi; così il numero A ſi legge otto mila trenta cinque.

A	8,035
B	43,726
C	530,109
D	4,$\overset{2}{3}$27,540,$\overset{1}{2}$89,605

Il numero B eſprime quarantatrè mila ſettecento ventiſei.

Il numero C indica cinquecento trenta mila cento nove.

Il numero D leggeſi quattro bilioni trecento ventiſette mila cinquecento quaranta milioni dugento ottantanove mila ſecento cinque.

Il numero poi 35,63$\overset{3}{8}$,264,68$\overset{2}{0}$,193,69$\overset{1}{5}$,261,164. ſi legge trentacinque mila ſecento trentotto trilioni, dugento ſeſſantaquattro mila ſecento ottanta bilioni, cento novantatrè mila ſecento novantacinque milioni, dugento ſeſſantun mila cenſeſſantaquattro.

Più facilmente ſi leggono i numeri, quando hanno molte cifre zero, come il ſeguente

3$\overset{2}{0}$,000,00$\overset{1}{5}$,007,000,000; il quale ſi enuncia; trenta mila bilioni cinque mila e ſette milioni.

PROBLEMA II.

38. Sommare i numeri interi.

RISOLUZIONE. 1. Primieramente i numeri dati ſi ſcrivano ordinatamente l' uno ſotto l' altro in guiſa, che

le unità dell' uno sieno ſotto le unità dell' altro, le decine ſotto le decine, le centinaia ſotto le centinaia, le migliaia ſotto le migliaia ec.

2. Sotto agli ſteſſi numeri tiriſi una lineetta traverſale.

3. Poſcia incominciando dalla parte deſtra ſi ſommino inſieme le ſemplici unità, cioè tutte quelle figure, le quali ſono nella prima colonna alla deſtra di chi ſcrive; e ſe la ſomma di eſſe figure non è maggiore di 9, tutta ſi ſcriva ſotto la linea, e nella ſteſſa colonna delle unità. La medeſima operazione ſi faccia nella ſeconda colonna, nella terza, nella quarta ec., e ſi avrà ſotto la linea la ricercata ſomma.

Come de' numeri 6123, 1231, 542 la ſomma ſarà 7896, cioè ſette mila ottocento novantaſei; perciocchè le unità 2+1+3 fanno 6 unità; le decine 4+3+2 fanno 9 decine; le centinaia 5+2+1 fanno 8 centinaia; e le migliaia 1+6 fanno 7 mila.

$$\begin{array}{r} 6123 \\ 1231 \\ 542 \\ \hline 7896 \end{array}$$

4. Quando poi la ſomma delle figure di qualſivoglia colonna è maggiore del numero nove, e contiene una, o più decine, allora ſotto la linea, e nella medeſima colonna ſi ſcriva ſoltanto ciò, che la ritrovata ſomma contiene di più delle decine intere, o ſcrivasi la cifra *o*, ſe contiene decine intere; poſcia alle figure della ſeguente colonna a ſiniſtra ſi aggiungano tante unità, quante decine si formarono dalla ſomma delle figure della precedente colonna; eccone un eſempio.

Si cerca qual ſomma compongano i numeri 5146, 4375, 7624, 238.

Si ſcrivano l' uno ſotto dell' altro ordinatamente, come si è detto antecedentemente, e tirata ſotto di eſſi la linea traverſa, ſi ſommino le figure della prima colonna, cioè le unità 8, 4, 5, 6, le quali

$$\begin{array}{r} 5146 \\ 4375 \\ 7624 \\ 238 \\ \hline 17383 \end{array}$$

fanno la ſomma 23; poichè 8+4 fanno 12, 12+5 fanno 17, e 17+6 fanno 23, la qual ſomma 23 contiene tre ſemplici unità, e due decine; perciò ſcrivaſi il 3 ſotto la linea nella colonna delle unità, e le due decine si ſommino colle altre decine 3, 2, 7, 4, onde la ſomma delle decine ſarà 2+3+2+7+4, cioè 18; ma dieci decine formano un centinaio; dunque della ritrovata ſomma 18 ſcrivaſi l' 8 [cioè otto ſemplici decine] ſotto la linea nella ſede delle decine, e l' 1, cioè una decina di decine, o sia un centinaio si aggiunga alle centinaia 2, 6, 3, 1, e ſarà 1+2+6+3+1, cioè 13 la ſomma delle centinaia; ma perchè dieci centinaia fanno un migliaio, però della ritrovata ſomma 13 si metta il 3 ſotto la linea nella terza colonna, ed un 1, cioè un mille agli altri mila 7, 4, 5 si aggiunga, e ſarà 1+7+4+5, cioè 17 la ſomma dei mila; ſi ponga dunque ſotto la linea il 7 nella quarta colonna, e 1, cioè una decina di mila alla siniſtra del 7 nella quinta ſede, che è quella delle decine di mila; per la qual coſa la ſomma de' numeri dati ſarà 17383, cioè diciaſſette mila trecento ottantatre.

Nella ſteſſa maniera operando si troverà, che la ſomma de' numeri 4200, e 5060 si è 9260, cioè nove mila dugento ſeſſanta.

```
4200
5060
----
9260
```

Medesimamente la ſomma de' numeri 32050, 6040, 2070, e 40 si troverà eſſere 40200, cioè quaranta mila dugento.

```
32050
 6040
 2070
   40
-----
40200
```

DIMOSTRAZIONE.

39. Sommare i numeri per la definizione undicesima [n. 14] è ritrovare un numero, il quale contenga tante parti, o unità, quante ne contengono i numeri dati insieme presi; ma dalla operazione fattasi nel primo esempio, il numero 7896 contiene tante unità, decine, centinaia, e migliaia, quante sono contenute ne' numeri 6123, 1231, 542 insieme presi; dunque il numero 7896 è la somma de' numeri dati. Nella stessa maniera si dimostra essersi fatte bene le altre somme.

40. ANNOTAZIONE. La prova dell' addizione si fa in molte maniere, come si può leggere negli autori classici dell' aritmetica. Comunemente per maggiore speditezza si ripete la stessa operazione, ma cangiato l' ordine di unire insieme le figure di ciascuna colonna; cioè se prima si è fatta la somma cominciando dall' infimo numero, e procedendo all' insù, la prova si faccia cominciando dal numero superiore, e discendendo sino all' ultimo inferiore, e trovando la medesima somma in tutte due le operazioni, probabilmente la somma ritrovata sarà esatta.

PROBLEMA III.

41. Sottrarre i numeri interi.

RISOLUZIONE. 1. In primo luogo si scriva il numero sottraendo o minore, ordinatamente sotto al numero minuendo, o maggiore, di modo che le unità sieno sotto alle unità, le decine corrispondano alle decine ec.; e sotto di essi numeri si tiri una linea traversa.

2. Incominciando dalla parte destra, si sottraggano le unità del numero sottraendo dalle unità del numero minuendo, poscia le decine dalle decine, le centinaia dalle centinaia ec., e ciò che rimane in ciascuna sede scrivasi sotto alla linea, e nella stessa sede. Se accade, che la figura del numero sottraendo sia uguale alla corrispondente nota del numero minuendo, in tal caso pongasi la cifra zero sotto la linea, e nella medesima sede.

PRIMO ESEMPIO.

Dal numero 137596 si debba sottrarre il numero 86524, il residuo, o sia differenza sarà 51072. Imperciocchè sottraendo le unità 4 dalle 6, rimangono 2 unità: indi due decine sottratte da 9 restano 7 decine; poscia 5 centinaia da 5 centinaia, il residuo è 0. Quindi sottraendo 6 mila da 7 mila, rimane 1. Finalmente perchè 8 decine di mila non si possono sottrarre dalle 3, si sottraggano dalle 13, ed il residuo sarà 5.

```
137596
 86524
------
 51072
```

3. Quando il numero maggiore ha delle figure, alle quali o non vi corrisponde veruna figura del numero sottraendo, o vi corrisponde la cifra zero; allora esse figure si scrivano sotto della linea nelle proprie loro sedi, come si vede nell' esempio seguente.

ESEMPIO SECONDO.

Dovendo sottrarre il numero 18040 dal numero 3058760, il residuo sarà 3040720; poichè sottraendo 0 da 0 resta 0; 4 da 6 rimane 2; 0 da 7 re-

```
3058760
  18040
-------
3040720
```

ſta 7; 8 da 8. l' avanzo è o; 1 da 5 reſta 4; niente da o reſta o; niente da 3 rimane 3.

4. Finalmente ſe qualche figura del numero ſottraendo ſarà maggiore della corriſpondente figura del numero maggiore, dalla quale ſi dovrebbe ſottrarre; allora alla ſuperior figura ſi aggiunga una decina; indi ſottratta l' inferior figura dalla ſuperiore accreſciuta di dieci, ſi metta il reſiduo ſotto alla linea nella ſua ſede. Poſcia per cagione della decina aggiunta alla ſuperior figura, o ſi ſminuiſca di 1 la vicina figura alla ſiniſtra della figura accreſciutaſi di dieci; ovvero per maggiore ſpeditezza, e facilità dell' operazione ſi aggiunga 1 alla ſeguente figura alla ſiniſtra della figura ſottratta; la qual coſa chiaramente ſi comprenderà dall' eſempio ſeguente.

ESEMPIO TERZO.

Sia il numero minuendo 436052, dal quale ſi debba ſottrare il numero 352064.

$$\begin{array}{r} 436052 \\ 352064 \\ \hline -83988 \end{array}$$

Pongaſi il numero ſottraendo ordinatamente ſotto del minuendo, come ſuperiormente ſi è detto; e tirata ſotto di eſſi la linea traverſa, ſempre incominciando dalla parte deſtra; ſi ſottragga il 4 dal 2, la qual coſa non ſi può fare, perciò allo ſteſſo 2 ſi aggiungano 10, e ſi avrà il 12, dal quale ſottratto il 4, rimane l' 8, il quale ſi ſcriva ſotto la linea nella ſede delle unità; quindi alla ſeguente figura 6 del numero ſottraendo ſi aggiunga 1, ſi farà 7, il quale ſottrarre non ſi può dalla ſuperiore corriſpondente figura 5; però, come ſopra ſi è detto, ſi aggiungano 10 al 5, ſi formerà 15, dal quale ſottratto il 7, il reſiduo ſarà 8, il quale ſcrivaſi ſotto la linea nella ſede delle decine. Dipoi ſi aggiunga 1 alla ſuſſeguente fi-

gura o del sottraendo, si avrà 1, il quale non si può sottrarre dalla superiore corrispondente figura 0, peró aggiungasi 1 allo 0, si farà 10, dal quale sottratto l' 1 resterà 9, che scrivasi sotto la linea nella terza sede; quindi si aggiunga 1 alla seguente inferior figura 2, si avrà 3, quale sottratto dal superiore 6, rimarrà il residuo 3, il quale scrivasi sotto la linea nella stessa sede; poscia sottraggo il 5 dal 13 [perchè 5 dal 3 non si puó sottrarre], e metto il residuo 8 sotto della linea, e ritengo 1, il quale aggiungo alla seguente inferior figura 3, e si avrà 4, il quale sottratto dal superior 4, niente vi rimane, e non si scrive la cifra 0 sotto della linea, essendo cosa inutile lo scriverla nel fine dell' operazione; sicchè il residuo di questa sottrazione sarà 83988.

ESEMPIO QUARTO.

A.	7104008
B.	962015
C.	6141993

Medesimamente sottraendo il numero B dal numero A, la differenza, o residuo sarà il numero C. Imperciocchè tolto il 5 dall' 8, il residuo è 3 da scriversi sotto la linea; 1 da 10, il residuo è 9; e di nuovo 1 da 10, resta poi 9; poi 3 da 4 rimane 1; indi 6 da 10 resta 4; poscia 10 da 11, rimane 1 da scriversi sotto la linea; finalmente 1 da 7, il residuo è 6.

42. DIMOSTRAZIONE. In ogni sottrazione (n. 16.) la differenza aggiunta al numero sottraendo fa una somma uguale al numero minuendo; ma nell' antecedente esempio quarto, facendo la somma della differenza, o residuo C col numero sottratto B, si restituisce il numero A; dunque il numero C è la differenza, che passa tra i numeri B, ed A. Lo stesso dimostrasi degli altri esempj. Il che ec.

43. COROLLARIO. Dalla dimoſtrazione antecedente ne ſegue, che la prova della ſottrazione ſi dee fare ſommando inſieme il numero ſottratto col reſiduo ritrovato, e ſe quella ſomma reſtituirà il numero minuendo, ſaremo certi di non aver errato.

PROBLEMA IV.

44. Moltiplicare i numeri interi.

1. RISOLUZIONE. Primieramente s'impari a memoria la moltiplicazione de' numeri ſemplici (n. 6.) deſcritta nella ſeguente tabella.

1 in 1 fa 1	4 in 4 fa 16	7 in 7 fa 49
1 in 2 fa 2 ec.	4 5 20	
	4 6 24	7 8 56
2 in 2 fa 4	4 7 28	
2 3 6	4 8 32	7 9 63
2 4 8	4 9 36	
2 5 10		
2 6 12		
2 7 14	5 5 25	
2 8 16	5 6 30	8 8 64
2 9 18	5 7 35	
	5 8 40	8 9 72
3 3 9	5 9 45	
3 4 12		
3 5 15		
3 6 18	6 6 36	
3 7 21	6 7 42	9 9 81
3 8 24	6 8 48	
3 9 27	6 9 54	

Quando poi si dovrà moltiplicare un numero composto per un numero semplice [n. 6.], ovvero un numero composto per un altro anche composto, allora si scriva il numero moltiplicatore ordinatamente sotto al moltiplicando [n.17.] in guisa che le unità dell' uno sieno sotto alle unità dell' altro, le decine sotto alle decine ec., poscia sotto di essi tirisi una linea traversale.

2. Se il moltiplicatore è numero semplice, si moltiplichi in ciascuna figura del moltiplicando, incominciando dalla parte destra, e proseguendo verso la sinistra; e quando qualsivoglia particolare prodotto non eccede il numero 9, allora tutto si scriva sotto della linea; ma se è maggiore del 9, e contenga una, o più decine, in tal caso sotto della linea scrivasi solamente il soprappiù delle decine, o si metta la cifra 0; se il prodotto contiene soltanto decine intere, si ritengono tante unità da aggiungersi al seguente prodotto, quante decine contiene esso prodotto; come nel seguente esempio si vedrà.

ESEMPIO PRIMO.

$$\begin{array}{r} 18521 \\ 7 \\ \hline 129647 \end{array}$$

Sia il numero moltiplicando 18521, e 'l moltiplicatore sia 7, il quale si metta sotto dell' unità del numero moltiplicando, e tirata sotto di essi la linea, moltiplico 7 in 1, e perchè sette volte 1 mi dà 7, scrivo il 7 sotto della linea nella prima sede; poi moltiplico 7 in 2, e del prodotto 14 scrivo il 4 sotto della linea nella seconda sede, ed 1, cioè una decina di decine, o sia un centinaio lo ritengo per aggiungerlo al seguente prodotto del 7 nel 5, il quale è 35, a cui aggiungo 1 serbato dall' antecedente prodotto, e fa 36; scrivo il 6 nella terza sede sotto alla linea, e riserbo 3, che sono tre decine di centinaia, o sia tre mila da

aggiugnersi al seguente prodotto dei mila; poscia 7 in 8 fa 56, a cui unisco il 3 ritenuto dal precedente prodotto, ed avrò 59, scrivo il 9 nella quarta sede sotto della linea, e ritengo 5. Finalmente moltiplico 7 in 1, e mi dà 7, al quale aggiungo il riserbato 5, ed avrò 12, il quale scrivo intero sotto la linea nelle sedi quinta, e sesta; ed il prodotto di sette volte 18521 sarà 129647, cioè cento ventinove mila secento quarantasette.

3. Quando poi il moltiplicatore è anch' esso un numero composto, allora per ciascuna figura di esso si moltiplichino ordinatamente tutte le figure del moltiplicando; ma i prodotti sotto della linea si deono scrivere in maniera, che (terminato il prodotto della prima figura del moltiplicatore in tutto il numero moltiplicando, come si è fatto nell'antecedente esempio), il prodotto della seconda figura del moltiplicatore nella prima del moltiplicando si scriva nella seconda sede, cioè in colonna, dirittamente sotto della stessa figura seconda del moltiplicatore, e gli altri particolari prodotti della stessa figura ordinatamente si scrivano verso la sinistra. Similmente il prodotto della terza figura del moltiplicatore nella prima del moltiplicando si scriva sotto della linea nella terza sede, cioè a dirittura sotto la stessa figura del moltiplicatore nella sede delle centinaia, e così proseguendo; come si puó facilmente intendere dai seguenti esempi.

4. Fatta la moltiplicazione per ciascuna delle figure del moltiplicatore, si tiri una una linea traversa sotto ai ritrovati particolari prodotti, i quali si raccolgano in una somma, la quale sarà il ricercato prodotto.

ESEMPIO SECONDO.

Il numero 3624 si debba moltiplicare per 23. Si scrivano come sopra si è detto, e sotto di essi tirata la linea retta; io dico 3 in 4 fa 12, scrivo 2 sotto alla linea nella prima sede, e riserbo 1 da aggiugnere al seguente prodotto; poscia 3 in 2 mi dà 6, cui aggiungo l' 1 riserbato, e mi fa 7, il quale metto sotto la linea nella seconda sede. Dipoi moltiplico 3 in 6, e del prodotto 18 scrivo l'8 nella terza sede, e ritengo 1 per aggiugnerlo al prodotto seguente del 3 nel tre, il quale è 9, ed aggiuntovi l' 1 riserbato, mi fa 10, il quale scrivo tutto sotto della linea in guisa che lo *zero* sia nella quarta sede, e l' 1 nella quinta; e sarà terminata la moltiplicazione del numero 3624 per la prima figura 3 del moltiplicatore.

3624
23
10872
7248
83352

Si moltiplichi ora lo stesso numero 3624 per la seconda figura 2 del moltiplicatore 23; ed il primo prodotto 8 che si fa moltiplicando il 2 nel 4, si scriva sotto la linea dirittamente sotto lo stesso moltiplicatore 2 nella sede delle decine, cioè sotto del 7 del già fatto prodotto della prima figura; impereiocchè il moltiplicatore 2 essendo nella seconda sede significa due decine, o venti unità; perciò in questo caso la figura 4 non si moltiplica per 2, ma bensì per 20, ed il 4 venti volte preso produce 80, cioè 8 decine; per la qual cosa l' 8 prodotto del 2 nel 4 si dee mettere nella sede delle decine, nella quale significa 80. Dipoi si moltiplichi 2 in 2, ed il prodotto 4 si ponga a sinistra dell' 8 nella terza sede, che è quella delle centinaia; perchè in questo caso 2 in 2 significa 20 in 20, che produce 400, ossia quattro centinaia. Quindi si molti-

plichi 2 in 6, e del prodotto 12 si scriva il 2 nella quarta sede, cioè a sinistra dell' antecedente 4, e 1 si serbi per aggiugnerlo al seguente prodotto del 2 nel 3, il quale è 6, ed aggiuntovi l' 1 riserbato avanti, fa 7, il quale mettasi nella quinta sede, a sinistra dell' antecedente figura 2. Finalmente tirata una linea traversa sotto ai ritrovati prodotti, si faccia la somma di essi particolari prodotti [n. 38], la qual somma sarà 83352; conseguentemente ventitrè volte il num. 3624 dà il prodotto 83352.

ESEMPIO TERZO.

Medesimamente moltiplicando il numero 46080 per 5030 ne nasce il prodotto 231782400. Imperciocchè moltiplicando 0 nel numero 46080 produco 0, il quale si scriva sotto la linea nella prima sede; indi moltiplico per la seconda figura 3 del moltiplicatore, e dico 3 in 0 fa 0, scrivo 0 nella seconda sede; poi 3 in 8 produce 24, scrivo 4 nella terza sede, e serbo 2 per aggiugnere al seguente prodotto del 3 nel 0, il quale è 0, ed aggiuntovi il 2 riservato fa 2, che scrivo nella quarta sede, e moltiplico 3 in 6, e del prodotto 18 scrivo l' 8 nella quinta sede, e ritengo 1 per unirlo al seguente prodotto; poscia dico 3 in 4 fa 12, più 1 riserbato fa 13, scrivo 3 nella sesta, e l' 1 nella settima sede. In terzo luogo moltiplico tutto il numero moltiplicando per la terza figura *zero* del moltiplicatore, e scrivo il prodotto *zero* sotto la linea nella terza sede, vale a dire sotto del 4 del prodotto già ritrovato. Finalmente moltiplico pel 5 quarta figura del moltiplicatore, e perchè 5 in 0 produce 0, scrivo 0 nella quarta sede direttamente sotto lo stesso molti-

```
    46080
     5030
---------
  1382400
 2304000
---------
231782400
```

plicatore 5, cioè alla siniſtra dell' antecedente 0; indi 5 in 8 fa 40, metto il 0 nella quinta ſede, e ſerbo 4; di poi dico 5 in 0 fa 0, a cui aggiungo il 4 riſerbato, e ſcrivo la ſomma 4 nella ſeſta ſede; 5 in 6 fa 30, pongo 0 nella ſettima ſede, e riſervo 3 da aggiugnere al prodotto ſeguente di 5 in 4, che è 20, e col 3 ſerbato fa 23, ſcrivo il 3 nell' ottava ſede, ed il 2 nella nona; e tirata ſotto una linea, e raccolti in una ſomma i ritrovati particolari prodotti, si avrà il ricercato prodotto 231782400.

ANNOTAZIONE. Da queſto eſempio si può facilmente conchiudere, che quando i numeri da moltiplicarsi hanno degli zeri nel fine, ſi poſſono moltiplicare ſenza i medesimi zeri, e terminata l' operazione aggiugnere gli ſteſſi zeri al prodotto ritrovato. Così ſe aveſſimo moltiplicato 4608 per 503, ed al prodotto 2317824 aveſſimo aggiunti alla siniſtra i due zeri omeſſi, si formava lo ſteſſo prodotto 231782400 nato dal moltiplicare 46080 per 5030.

Similmente a moltiplicare 400 per 20, moltiplico 2 in 4, ed al prodotto 8 aggiungo i tre zeri dei numeri moltiplicati, ed avrò 8000 prodotto di venti volte 400.

Inoltre si oſſervi, che il moltiplicare per gli zeri, che ſono tramezzo alle altre figure del moltiplicatore, è operazione ſuperflua.

Così quando si è moltiplicato tutto il numero moltiplicando per la terza figura 0 del moltiplicatore 5030, si è poſto il prodotto 0 nella terza ſede, ſotto del 4 dell' antecedente prodotto, e si poteva, ſenza pericolo di far errore, paſſare alla moltiplicazione della quarta figura 5, e tralaſciare la moltiplicazione pel ſuddetto 0, come inutile.

ESEMPIO QUARTO.

Nella ſteſſa maniera moltiplicando il numero 3542 pel numero 1046 ne naſcerà il prodotto 3704932.

```
   3542
   1046
-------
  21252
 14168
3542
-------
3704932
```

45. DIMOSTRAZIONE. Nella moltiplicazione il prodotto dee [n. 17.] contenere tante volte il numero moltiplicando, quante unità, o parti dell' unità ſono contenute nel moltiplicatore; nel primo eſempio il prodotto 129647 per l' operazione fattaſi, contiene tante volte il moltiplicando 18521, quante ſono le unità contenute nel moltiplicatore 7; poichè, ſe il numero moltiplicando 18521 ſi ſcriverà ordinatamente ſette volte, e quindi (n. 38.) ſi farà l' addizione, ſi troverà nella ſomma lo ſteſſo numero 129647; dunque queſto numero è il prodotto del numero 7 moltiplicato nel numero 18521; eſſendo che la moltiplicazione (n. 18.) è una compendioſa addizione dello ſteſſo numero. La ſteſſa coſa intendaſi di ogni altro eſempio della moltiplicazione. Il che ec.

46. ANNOTAZIONE. La prova della moltiplicazione ſi può fare dividendo il ritrovato prodotto per uno de' due moltiplicatori, e ſe per quoziente ne verrà l' altro moltiplicatore, ſaremo certi d' aver operato bene; ma prima biſogna ſapere come ſi faccia la diviſione, la qual coſa s' imparerà dal problema ſeguente.

PROBLEMA QUINTO.

47. Dividere i numeri interi.

RISOLUZIONE. 1. Per imparare facilmente la divisione, è necessario di saper bene a memoria la moltiplicazione de' numeri semplici contenuta nella tabella descritta nel problema quarto al numero 44. Imperciocchè colui, per esempio, che già sa, che 7 volte 9 fa 63, facilmente conoscerà, che il 63 contiene sette volte il 9, e nove volte il 7; e così degli altri.

2. Quando il divisore è un numero semplice, ed il dividendo è composto di due, o più figure, allora scrivasi primieramente il numero dividendo, alla destra del quale, lasciato qualche piccolo spazio, si tiri una lineetta dall'alto al basso, e dopo di essa verso la destra si ponga il divisore, sotto del quale si tiri una lineetta traversa, come si può vedere nel seguente esempio. Poscia incominciando dalla parte sinistra si divida ciascuna figura del numero dividendo pel dato divisore, ed i particolari quozienti si mettano sotto della linea tirata sotto al divisore, come chiaramente si vedrà nell' esempio seguente.

ESEMPIO PRIMO.

```
         A
64820 | 2
        B———C
         32410.
```

Sia il numero 64820 da dividersi pel numero 2. Scrivasi in primo luogo il numero dividendo 64820, e alla destra di esso dal alto al basso tirisi la linea AB, e dopo di essa scrivasi alla destra il divisore 2, sotto del quale si tiri la lineetta BC. Quindi incominciando dalla parte sinistra del dividendo, dico; il 2 nel 6 è contenuto 3 volte (perchè 2×3 fa 6), scrivo dunque il 3 per prima figura

del quoziente ſotto alla linea BC. Poſcia il 2 nel 4 è contenuto due volte, ſcrivo 2 nel quoziente alla deſtra dell' altra figura 3; di poi 2 nell' 8 è contenuto quattro volte, metto 4 per terza figura del quoziente, e divido 2 per 2, ed il quoziente è 1, che ſcrivo per quarta figura del quoziente. Finalmente il 2 nello 0 non è contenuto, e però ſcrivo 0 per quinta ed ultima figura del ricercato quoziente; per la qual coſa il quoziente di queſta diviſione ſarà 32410.

ESEMPIO SECONDO.

In queſto eſempio ſi vedrà la maniera di operare, quando il diviſore ſemplice non è contenuto intere volte in ciaſcuna figura del dividendo. Dato ſia il numero dividendo 1380, ed il diviſore ſia il numero 4, i quali ſi ſcrivano come nell' antecedente eſempio; poſcia perchè il diviſore 4 non è contenuto nella prima figura 1 del numero dividendo, ſi prendano le due prime figure del dividendo, cioè ſi divida il 13 pel 4; ma il 4 nel 13 è contenuto ſolamente tre volte, perciò ſotto del diviſore ſi ſcriva 3 per prima figura del quoziente, e ſi moltiplichi lo ſteſſo 3 pel diviſore 4, ed il prodotto 12 ſcrivaſi ſotto al membro diviſo 13, e ſotto del 12 ſi tiri una lineetta traverſa, la quale non si prolunghi verſo la deſtra oltre al 2; indi ſottraggaſi il 12 dal 13, ed alla deſtra del reſiduo 1 ſi diſcenda la terza figura 8 del numero dividendo, e ſi avrà 18 per ſecondo membro da dividersi pel 4; ora il 4 nel 18 non è contenuto cinque volte [perchè 4×5 fa 20 maggiore del 18], ma ſolamente quattro volte; però ſcrivaſi

```
1380 | 4
     |----
12     345
--
 18
 16
 --
  20
  20
  --
   0
```

4 per ſeconda figura del quoziente, la quale si moltiplichi nel diviſore 4, ed il prodotto 16 ſcrivasi ſotto al membro diviſo 18, dal quale si ſottragga, ed alla deſtra del residuo 2 si diſcenda la cifra 0, ultima figura del dividendo; ſarà 20 il terzo, ed ultimo membro dividendo, nel quale il diviſore 4 è contenuto cinque volte: ſcrivaſi dunque 5 per terza, ed ultima figura del quoziente; indi moltiplicato il 5 nel diviſore 4, il prodotto 20 si ſottragga dal membro diviſo 20, e nulla rimarrà, e ſarà terminata l' operazione; conſeguentemente il quoziente di queſta divisione ſarà 345.

3. Se nel corſo dell' operazione si troverà qualche membro dividendo, il quale sia minore del diviſore, in tal caſo nel quoziente si metta la cifra 0, ed accanto al membro dividendo ſi diſcenda un' altra figura del numero dividendo, e, dopo d' aver aggiunta eſſa figura, ſe il diviſore non ſarà ancora contenuto in quel membro dividendo, si metta un' altra cifra 0 nel quoziente, ed accanto al membro dividendo si diſcenda un' altra figura del numero dividendo, e queſta operazione si replichi tante volte infinattantochè il diviſore sia contenuto nel membro dividendo, ovvero neſſuna figura vi rimanga nel numero dividendo; come nel ſeguente eſempio si vedrà.

ESEMPIO TERZO.

Il diviſore 8, nella prima figura 8 del numero dividendo 801600, è contenuto una volta ſolamente, onde la prima figura del quoziente ſarà 1, la quale moltiplichiſi nel diviſore 8, ed il prodotto 8 ſcrivaſi ſotto della figura 8

801600	8
8	100200
0016	
16	
000	

del numero dividendo, dalla quale si sottragga, il residuo sarà o, alla cui destra si discenda la seconda figura o del numero dividendo, e sarà membro dividendo oo, nel quale il divisore 8 non è contenuto, o diciamo altrimenti, è contenuto zero volte, perciò scrivasi o per seconda figura del quoziente, e alla destra del membro oo si discenda la terza figura del numero dividendo, la quale è 1, si formerà il membro dividendo oo1, cioè 1, che non contiene il divisore 8, che però si metta per terza figura del quoziente un' altra cifra o, ed al membro oo1 si aggiunga alla destra la quarta figura 6 del numero dividendo, e si avrà il membro dividendo oo16, cioè 16, nel quale il divisore 8 è contenuto due volte, perció scrivasi 2 per quarta figura del quoziente, e si moltiplichi 2 in 8, ed il prodotto 16 sottraggasi dal membro diviso 16, ed al residuo o si aggiunga alla destra la quinta figura del numero dividendo, la quale è o, si avrà il membro dividendo oo, nel quale il divisore 8 non è contenuto, perció mettasi o per quinta figura del quoziente, e si discenda l' ultima figura o del numero dividendo, e perchè il divisore non è contenuto nel membro dividendo ooo, nuovamente scrivasi un' altra cifra o per sesta figura del quoziente, e sarà 100200 il quoziente di questa divisione.

4. Se il divisore sarà anch' esso composto di due, o più figure, allora alla sinistra del divivendo si separino con un punto o virgola altrettante figure, quante ne contiene il divisore, anzi se esse formano un numero minore del divisore, in tal caso se ne separi una di più, e quindi si faccia la divisione come ne' seguenti esempi.

ESEMPIO QUARTO

Sia il divisore 24, ed il dividendo 6816, i quali si scrivano come si è insegnato nel primo esempio. Poscia con un punto sotto l' 8 si separi dal numero dividendo il 68, e col seguente raziocinio si cerchi quante volte il 24 sia contenuto nel 68.

```
68,16 | 24
      |----
        284
48
--
201
192
---
  96
  96
  --
   0
```

La prima figura 2 del divisore nella prima figura 6 del dividendo è contenuta tre volte; ma perchè la seconda figura 4 del divisore non è contenuta tre volte nella seconda figura 8 del membro dividendo 68, il membro dividendo 68 non contiene tre volte il divisore 24; però in questo caso il 2 nel 6 è contenuto solamente due volte, e ne avanzano 2, i quali colla seguente figura 8 fanno 28, nel quale l' altra figura 4 del divisore, è parimente contenuta due volte (niente importa che sia contenuta di più) sicchè il 24 nel 68 è contenuto due volte, si metta dunque il 2 per prima figura del quoziente, sotto al divisore, e per esso 2 si moltiplichi il divisore 24, ed il prodotto 48 scrivasi sotto al membro diviso 68, in questa maniera, cioè moltiplico 2 in 4, e scrivo il prodotto 8 sotto al 8 del numero 68; poi moltiplico 2 in 2, e scrivo il prodotto 4 sotto al 6 del 68; indi sottratto il 48 dal 68, al residuo 20 aggiungo alla destra la terza figura 1 del numero dividendo, onde si forma un altro membro dividendo 201, il quale divido pel 24; dico, cioè, il 2 nel 20 è contenuto nove volte (poichè in qualsivoglia particolare ope-

razione non mai ſi dee mettere nel quoziente un numero che ſia maggiore del 9) ma ne avanzano 2, che colla ſeguente figura 1 formano 21, nel quale il 4 ſeconda figura del diviſore non può eſſer contenuto nove volte [perchè 4×9 fa 36]; perció in queſto caſo il 2 nel 20 non puó eſſere contenuto nove volte; ſia dunque contenuto otto volte, ne rimarranno 4 [perchè 2×8 fa 16], i quali colla ſuſſeguente figura 1 fanno 41, nel quale la ſeconda figura 4 del diviſore è anche contenuta 8 volte; epperó ſcrivo 8 per ſeconda figura del quoziente, e la moltiplico nel diviſore 24, ed il prodotto 192 lo ſcrivo ſotto al 201, dal quale lo ſottraggo, ed al reſiduo 9 aggiungo alla deſtra la quarta figura 6 del numero dividendo, e divido il 96 per 24; dico 2 in 9 è contenuto 4 volte, e ne ſopravanza 1, il quale colla ſeguente figura 6 fa 16, in cui la ſeconda figura 4 del diviſore è anche contenuta quattro volte; laonde pongo 4 per terza figura del quoziente, e perchè, moltiplicato eſſo 4 nel diviſore 24, e ſottratto il prodotto 96 dal membro diviſo 96, niente rimane, ſarà dunque 284 il quoziente di queſta diviſione, cioè la ventiquattreſima parte del numero dividendo 6816.

5. Qualora poi rimane qualche avanzo dopo terminata la divisione, allora quel residuo si scriva dopo il ritrovato quoziente in forma di frazione, vale a dire si metta ſopra una lineetta per numeratore [n. 11.] e ſotto di eſſa ſcrivasi il diviſore, che ſarà denominatore della frazione; di qui ancora ne naſcono le frazioni, delle quali tratteremo nel ſecondo libro.

ESEMPIO QUINTO.

187695	257
1799	730 $\frac{85}{257}$
779	
771	
85	

Sia da dividersi il numero 187695 pel numero 257, i quali si scrivano come si è detto nel primo esempio; quindi perchè le prime tre figure del numero dividendo formano il numero 187 minore del divisore 257, perció si prendano quattro figure, e si avrà 1876 per primo membro dividendo, nel quale il divisore 257 è contenuto sette volte; imperocchè la prima figura 2 del divisore nel 18 è contenuta nove volte, ma la seconda figura 5 del divisore non è contenuta nove volte nella terza figura 7 del membro dividendo; perció si dee conchiudere, che il divisore 257 non è contenuto nove volte nel 1876; laonde sminuisco di uno il quoziente 9, e dico, il 2 in 18 sia contenuto otto volte, ne sopravanzeranno 2 [perchè 2×8 fa 16], i quali colla seguente figura 7 fanno 27, nel quale la figura 5 del divisore non è contenuta otto volte, dunque il divisore 257 non sarà contenuto otto volte nel membro 1876, conseguentemente di nuovo diminuisco dell' unità il quoziente 8, e dico, il 2 in 18 sia contenuto 7 volte, ne sopravanzeranno 4, che colla seguente figura 7 fanno 47, in cui la seconda figura 5 del divisore è anche contenuta 7 volte, e sopravanzano 12 (perchè 5×7 fa solamente 35), i quali 12 coll' ultima figura 6 del membro dividendo fanno 116, nel quale l' ultima figura 7 del divisore è parimente contenuta 7 volte; scrivo perció il 7 per prima figura del quoziente, e moltiplico per esso 7 tutto il divisore 257, scrivendone il prodotto 1799 ordinatamente sotto al

membro diviſo 1876, e ſottraggo 1799 dal 1876, ed alla deſtra del residuo 77 diſcendo la ſeguente figura 9 del numero dividendo, e si formerà 779 altro membro da dividersi, in cui il diviſore è contenuto tre volte; perciocchè 2 in 7 è contenuto tre volte coll' avanzo 1, che colla ſeguente figura 7 fa 17, nel quale la ſeconda figura 5 del diviſore è similmente contenuta 3 volte, e ne ſopravanzano 2, che colla ſeguente figura 9 fanno 29, nel quale la terza figura 7 del diviſore è anche contenuta 3 volte; metto pertanto il 3 per ſeconda figura del quoziente, e moltiplicato eſſo 3 nel diviſore 257, ne ſottraggo il prodotto 771 dal membro diviſo 779, ed al residuo 8 aggiungo alla deſtra l' ultima figura 5 del dividendo, ed avró 85 per ultimo membro dividendo, nel quale il diviſore 257 non è contenuto, peró ſcrivo o per ultima figura del quoziente; dunque il quoziente di queſta divisione ſarà 730 col residuo 85, il quale ſcrivasi dopo il 730 ſopra una lineetta, ſotto di cui mettasi il diviſore 257, e si avrà per quoziente totale di queſta divisione il numero miſto $730\frac{85}{257}$ (n. 12), vale a dire ſettecento trenta interi, e ottantacinque ducencinquantaſettesime parti d' un intero.

6. Finalmente, ſe il diviſore è maggiore del numero dividendo, allora il quoziente ſi eſprime per una frazione [n. 11.] ſcrivendo per numeratore il numero dividendo, e per denominatore il diviſore.

Così volendo dividere il numero 3 pel diviſore 4, il quoziente ſarà $\frac{3}{4}$ cioè tre quarti di una di quelle unità, che ſono contenute nel numero dividendo 3. Mettiamo per eſempio, che ſiano 3 lire d' argento da

venti ſoldi l'una, le quali ſi debbano dividere ugualmente tra quattro perſone, è coſa evidente, che a ciaſcuna perſona ſi dovranno dare ſoldi 15, che ſono la quarta parte di ſoldi 60, i quali compongono tre lire; ma 15 ſoldi ſono tre quarti di lira; dunque la frazione $\frac{3}{4}$ eſprime il vero quoziente che naſce dividendo il 3 per 4.

Medeſimamente dividendo il numero 14 pel numero 35, il quoziente ſarà $\frac{14}{35}$; lo ſteſſo s' intenda di ogni altra ſimile diviſione.

48. DIMOSTRAZIONE. Il quoziente di qualunque diviſione dee eſprimere quante volte il diviſore ſia contenuto nel numero dividendo; ma, verbigrazia, nel quarto eſempio di queſto problema il numero 284 indica quante volte il diviſore 24 è contenuto nel dividendo 6816; perciocchè ſe il numero 24 ſi replicherà dugentottantaquattro volte, vale a dire, ſe ſi moltiplicherà 24 per 284, il prodotto reſtituirà il numero dividendo 6816. Dunque il numero 284 è il quoziente di eſſa diviſione. Lo ſteſſo raziocinio ſi applichi agli altri eſempi. Il che ſi era propoſto di fare, e dimoſtrare.

49. COROLLARIO. Da quanto ſi è detto antecedentemente, chiaro ne ſegue, che la prova della diviſione ſi dee fare moltiplicando il ritrovato quoziente pel diviſore, ed il prodotto reſtituirà ſempre il numero dividendo, quando si è fatta bene l' operazione. Così moltiplicando 345 quoziente dell' eſempio ſecondo, pel diviſore 4, il prodotto 1380 reſtituiſce il numero dividendo.

Quando poi non ſi è potuto fare la diviſione in interi, ma vi è rimaſto qualche avanzo, allora al prodotto del diviſore nel quoziente ſi aggiunga quell' avanzo; come volendo far la prova del quinto eſempio, ſi moltiplichi il diviſore 257 pel quoziente intero 730, ed al prodotto 187610 ſi aggiunga il reſiduo 85, e la ſomma 187695 reſtituirà il numero dividendo, come chiaramente ſi vede.

PROBLEMA VI.

50. Sommare le quantità algebraiche.

RISOLUZIONE. La ſomma delle quantità eſpreſſe colle lettere dell' alfabeto ſi fa ſcrivendo le date quantità l' una dopo l' altra coi loro ſegni $+$, e $-$, che hanno, o s' intendono avere prefiſſi (n. 35.).

Che però la ſomma delle quantità ſemplici (n. 36.) a, b, c, $-x$ ſi farà ſcrivendo $a+b+c-x$.

Medeſimamente delle quantità $4a$, cx, $\frac{b}{m}$, $5am$, la ſomma ſarà $4a+cx+\frac{b}{m}+5am$.

Similmente la ſomma delle quantità composte $a+b+x$, $3c-m$, $ax+2ac-z$ ſi eſprimerà ſcrivendo $a+b+x+3c-m+ax+2ac-z$.

Nella ſteſſa maniera date le quantità $a+c$, m, $a-m$, b, $a-x$, la loro ſomma ſarà $a+c+m+a-m+b+a-x$, la quale ſi può eſprimere più brevemente, come vedremo nel problema ſeguente.

PROBLEMA VII.

51. Ridurre le quantità compoſte a minor numero di termini.

1. RISOLUZIONE. Quando una quantità medesima si trova scritta due volte in una stessa somma, cioè una volta col segno $+$, ed un' altra volta notata col segno $-$ (vale a dire una volta positiva, ed un' altra volta negativa) allora essa quantità si tolga interamente da quella somma. Così
$a-a$, cioè $+a-a$, $+8-8$, $7am-7am$ niente significano nella stessa somma; poichè i segni $+$, e $-$ sono contrarii, e ciò, che in questo caso si afferma dal segno $+$, vien negato dal segno $-$.

Onde la somma $4a-b+4c-x-4c$ si riduce a più semplice espressione $4a-b-x$, perchè i due termini $+4c$, $-4c$ si distruggono l' uno l' altro.

Medesimamente la quantità composta $4a-3b+cx+3b+2c-cx$ si riduce a minori termini $4a+2c$, perchè i termini $-3b$, $+3b$, e $+cx$, $-cx$ vicendevolmente si distruggono.

2. Se nella stessa somma si troveranno più termini espressi dalle medesime lettere aventi lo stesso segno $+$, ovvero $-$, prefisso; in tal caso si sommino insieme tutti i coefficienti (nn. 23, 24) di esse quantità, ed alla somma si premetta lo stesso segno, e dopo la suddetta somma de' coefficienti scrivasi una volta solamente la medesima quantità. Per esempio la somma $a+a$ si esprime per $2a$; la somma $3a+4a$ si esprime per $7a$ ec.

Parimente la quantità composta $2a+b+3a+4ab+7a$ si riduce a minori termini $12a+5b$.

Similmente la quantità $4a+3x-3b+a-4b+x$ si riduce a tre termini $5a+4x-7b$, ec.

3. quando poi le quantità espresse dalle medesime lettere hanno segni contrari, e coefficienti disuguali, in tal caso si sottragga il coefficiente minore dal maggiore, ed al residuo si preponga il segno del coeffi-

ciente maggiore, e dopo il residuo, una volta soltanto scrivasi la stessa quantità.

Laonde il quadrinomio $12ab+4b-5ab-9b$ sottratti i coefficienti 5 dal 12, e 4 dal 9, e posto il segno + avanti al residuo 7, ed il segno − avanti al residuo 5, si esprimerà più brevemente col binomio $7ab-5b$, omettendo il segno + avanti al 7, perchè (n. 35) gl' s' intende prefisso.

Per la stessa ragione, la quantità $4a+3c-4b-a+8b$ si riduce al trinomio $3a+3c+4b$; e così delle altre.

PROBLEMA OTTAVO.

52. Sottrarre le quantità algebraiche.

RISOLUZIONE. Primieramente scrivasi la quantità minuenda tale, qual'è, con tutti i suoi segni +, e −, indi alla medesima quantità si aggiunga la quantità sottraenda, ma coi segni cangiati, cioè + in −, e − cangiato in +, e si avrà il ricercato residuo, o differenza tra le due date quantità.

Come dovendo sottrarre la quantità c dalla quantità a, ossia $+c$ da $+a$, il residuo, o differenza sarà $+a-c$, cioè $a-c$.

$$\begin{array}{c} a \\ c \\ \hline a-c \end{array}$$

Similmente sottraendo $-m$ dall' a, il residuo, o differenza sarà $a+m$.

Medesimamente dalla quantità $3a+2b-c$ sottraendo la quantità $m-3x+z$, la differenza, o residuo sarà $3a+2b-c-m+3x-z$.

53. DIMOSTRAZIONE. In ogni sottrazione [n. 15.] il residuo, o differenza è ciò, che manca alla quantità sottraenda per uguagliare la quantità minuenda, perciò la somma del residuo colla quantità sottratta restituir dee la quantità minuenda; ma facendo la sottrazione nella maniera insegnata nell'antecedente numero,

ſe poſcia si ſommeranno inſieme il reſiduo, e la quantità ſottratta, ſempre nella ſomma si reſtituirà la quantità minuenda; dunque la ſottrazione delle quantità dee farsi ſommando insieme la quantità minuenda colla ſottraenda, mutando peró tutti i ſegni di queſta.

Come nell' antecedente ultima ſottrazione, ſe il residuo ritrovato $3a+2b-c-m+3x-z$ si ſommerà colla quantità ſottratta $m-3x+z$, ne verrà la ſomma $3a+2b-c-m+3x-z+m-3x+z$, la quale ridotta a minori termini [n. 51] reſtituiſce la quantità minuenda $3a+2b-c$; perchè $-m$, $+m$, e $+3x$, $-3x$, e $-z$, $+z$ niente significando, si cancellano.

ANNOTAZIONE. Quantunque la dimoſtrazione di queſta operazione sia convincente, ció non oſtante ſpeſſe volte i principianti reſtano imbrogliati, e ſtentano a concepire, che ſottraendo una quantità negativa, eſſa diventi positiva, come per eſempio ſottraendo $-c$ dall' a, la differenza sia $a+c$, ovvero ſottraendo il -3 dal 12, il residuo, o differenza sia $12+3$, cioè 15. A ben comprendere queſta verità biſogna ricordarſi, che (n. 15.) nella ſottrazione si cerca ció, che manca alla quantità ſottraenda per uguagliare la minuenda, ora al -3 per uguagliare il 12 mancano quindici unità, poichè cominciando ad acquiſtarne 3, allora avrà $-3+3$, cioè niente, poſcia dee acquiſtarne altre dodici per uguagliare il 12.

Per maggior chiarezza di queſta verità mettiamo, che Clelio non abbia verun capitale, ed abbia un debito di 3 doppie, dunque il ſuo avere ſarà negativo -3 [n. 25]; Edoardo poi ſia ſenza debiti, ed abbia di capitale 12 doppie, eſſo avrà $+12$; ora ſe Clelio vorrà avere tante doppie, quante ne ha Edoardo, dovrà neceſſariamente acquiſtarne quindici, tre delle quali gli ſono neceſſarie per pagare il ſuo debito, e le altre dodici per averne ugualmente, che Edoardo; peró

sottraendo -3 da 12, il residuo, o differenza è $12+3$, cioè 15.

Ma se bisognasse sottrarre il 12 dal -3, allora il residuo sarebbe negativo $-3-12$, cioè -15; infatti Edoardo, che ha dodici di capitale per rimanere con niente, e di più con un debito di tre doppie, dee prima perdere le dodici doppie, che ha, per non avere più niente, indi ne dee perdere altre tre, per essere uguale a Clelio, laonde dee perderne quindici; perciò sottratto il 12 dal -3 si ha il residuo -15.

PROBLEMA NONO.

54. Moltiplicare le quantità algebraiche.

I. RISOLUZIONE I. Essendo che tutte le quantità sono o positive, o negative (n. 25.), perciò moltiplicandole tra di loro, i prodotti che ne veranno, saranno pure o positivi, o negativi; è dunque necessario moltiplicare in primo luogo tra di loro i segni, che hanno prefissi le quantità da moltiplicarsi, per ritrovare il segno da porsi avanti al ricercato prodotto, la qual cosa facilmente si otterrà colle seguenti regole.

REGOLA PRIMA.

55. I segni simili, e medesimi moltiplicati tra di loro sempre danno più nel prodotto, vale a dire moltiplicando + per +, o − per − nel prodotto sempre mettasi +; imperciocchè moltiplicare + per + è porre una cosa positiva, o sia affermarla; ed il moltiplicare − per − egli è un negare una cosa negativa, perciò è la stessa cosa, che affermarla, poichè come dicono i filosofi, due negazioni affermano.

$$\left.\begin{matrix}+\times+\\-\times-\end{matrix}\right)+$$

REGOLA SECONDA.

56. Moltiplicando tra di loro segni contrarii, nel prodotto si metta sempre il segno negativo $-$; cioè moltiplicando $+$ nel $-$, o $-$ nel $+$, il prodotto sarà sempre $-$; poichè il $\left.\begin{matrix}+\times- \\ -\times+\end{matrix}\right)-$ moltiplicare $+$ nel $-$ egli è un porre, o sia affermare il negativo; ma porre, o affermare il negativo è la stessa cosa, che negare il positivo; dunque moltiplicando una quantità positiva per una negativa, il prodotto sarà negativo.

Moltiplicare il $-$ nel $+$ egli è negare il positivo, sarà dunque lo stesso, che porre il negativo, conseguentemente una quantità negativa moltiplicata in una positiva darà il prodotto negativo.

57. II. dopo fatta la moltiplicazione de' segni secondo le regole antecedenti, se le quantità letterali hanno de' numeri coefficienti [n. 23.], essi fra loro si moltiplichino, come nell' aritmetica volgare.

58. III. Finalmente la moltiplicazione delle quantità letterali si fa scrivendole l' una dopo l' altra, senza frapporvi verun segno tramezzo; qualche volta però si frammette il segno della moltiplicazione [n. 31.].

Laonde moltiplicando a per m, cioè (nn. 24. 35.) $+1a$ per $+1m$, il prodotto sarà $+1am$, o sia am, il quale ancora si esprime così $a\times m$. Medesimamente moltiplicando am per c, il prodotto si esprimerà $am\times c$, ovvero amc, oppure acm, ovveramente cam, o mca ec.; poichè nulla importa con qualunque ordine si scrivano le lettere; sarà però sempre meglio assuefarsi a scriverle secondo l' ordine dell' alfabeto; perchè ciò riesce di maggior facilità nel calcolare, e ridurre a minori termini.

Similmente $abcmx$, ovvero $a \times b \times c \times m \times x$, oppure $abc \times mx$ ec. è il prodotto di a in b in c in m in x.

Moltiplicando $-3a$ per $5b$, cioè per $+5b$, il prodotto sarà $-15ab$, poichè $-$ moliplicato per $+$ (n. 56) fa $-$ nel prodotto, 3 nel 5 dà 15, ed a in b dà ab.

Medesimamente $4c$ moltiplicato per $3m$ dà nel prodotto $12cm$.

Moltiplicando cm, cioè $+1cm$ per $-7mx$, il prodotto sarà $-7cmmx$.

Supponiamo per esempio, che la quantità a significhi il numero 6, e la quantità b il numero 4, e la quantità c il numero 2. Mettiamo cioè, che sia $a=6$, $b=4$, $c=2$, allora il prodotto ab significherà 6×4, cioè 24, ed il prodotto abc, o sia $ab \times c$ significherà 24×2, vale a dire 48, e la quantità $5abc$ significherà 5×48, cioè il numero 240.

59. RISOLUZIONE. II. Se una quantità composta [n. 36] dovrà moltiplicarsi per una semplice, in tal caso scrivasi la semplice quantità sotto al primo termine della quantità complessa, e sotto si tiri una linea traversale, poscia si moltiplichi la semplice quantità in ciascun termine della quantità composta, incominciando dalla parte sinistra e proseguendo verso la destra, ed i particolari prodotti, che ne verranno, si scrivano sotto la linea l' un dopo l' altro coi loro segni $+$, e $-$, diligentemente osservando tutte le regole state insegnate negli antecedenti numeri 55, 56, 57, e 58.

Si debba moltiplicare la quantità $a+2b-c$ per m. Posta la quantità m sotto al primo termine a, e tirata sotto di esse la linea, moltiplico m per a, e scrivo il prodotto am sotto della linea; poi moltiplico m per $+2b$, ed il prodotto $+2bm$ lo aggiungo al primo prodotto am, verso

$$\begin{array}{l} a+2b-c \\ m \\ \hline am+2bm-cm \end{array}$$

la destra. Finalmente moltiplico m pel $-c$, ed il prodotto $-cm$ lo scrivo sotto della linea in terzo luogo; laonde il prodotto, che nasce moltiplicando $a+2b-c$ per m, sarà $am+2b-cm$.

Similmente moltiplicando la quantità $3a-4c+m$ per $3c$, si avrà il prodotto $9ac-12cc+3cm$. Lo stesso si intenda delle altre simili quantità.

$$\begin{array}{l} 3a-4c+m \\ 3c \\ \hline 9ac-12cc+3cm \end{array}$$

60. RISOLUZIONE 3. Dovendo moltiplicare una quantità complessa per un' altra composta grandezza; scrivansi l' una sotto dell' altra le date quantità, e, tirata sotto di esse una linea, si moltiplichi ciascun termine della quantità inferiore in tutti i termini dell' altra quantità, e ciascun particolare prodotto si scriva sotto della linea l' uno dopo l' altro con i loro propri segni $+$, e $-$, e la somma di essi sarà il ricercato prodotto.

Sia la quantità moltiplicanda $a+b$, ed il motiplicatore sia $c+x$, i quali si scrivano come si è detto, poscia si moltiplichi in primo luogo $a+b$ per c, ed il prodotto [n. 59] $ac+bc$ si metta sotto alla linea; quindi si moltiplichi la stessa quantità $a+b$ per $+x$, ed il prodotto $ax+bx$ si aggiunga al prodotto già ritrovato $ac+bc$; che però il prodotto di questa moltiplicazione sarà $ac+bc+ax+bx$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ c+x \\ \hline ac+bc+ax+bx \end{array}$$

Similmente moltiplicando $3a+2b-cx$ per $4a-c$, il prodotto sarà $12aa+8ab-4acx-3ac-2bc+ccx$.

Parimente moltiplicando $am-3c+4$ per $b-4a+2$, si otterrà il prodotto $abm-3bc+4b-4aam+12ac-16a+2am-bc+8$.

Moltiplicando $a-c$ per
$a-c$, ſi ottiene

il prodotto $aa-ac-ac+cc$, il quale ridotto a minori termini (n. 51) ſi eſprime per $aa-2ac+cc$.

Per maggior riſchiaramento di queſta operazione, ſia in numeri da moltiplicarſi $8-3$, che vuol dire 5, per $6-2$, che ſignifica 4, ognuno vede, che il prodotto del 4 nel 5 ſi è 20, ſi faccia ora la moltiplicazione del $8-3$ per $6-2$ algebraicamente, il prodotto ſarà $48-18-16+6$, il quale ſignifica $54-34$, cioè il 20, prodotto del 5, ſignificato dal $8-3$ nel 4, indicato dal $6-2$.

$$\begin{array}{l} 8-3 \\ 6-2 \\ \hline 48-18-16+6 \end{array}$$

Da queſto eſempio ſi vede evidentemente, che nella moltiplicazione i ſegni ſimili, cioè $+\times+$, e $-\times-$, danno $+$ nel prodotto, ed i ſegni contrari, cioè $+\times-$, e $-\times+$ producono $-$

61. ANNOTAZIONE. I. Alcune volte accade, che la moltiplicazione delle quantità compleſſe non ſi dee fare attualmente, e baſta ſoltanto accennarla, e ciò ſi fa per mezzo del ſegno della moltiplicazione [n. 31.], e tirando una linea, che copra i moltiplicatori compoſti.

Così $\overline{a+c-x}\times\overline{b-m}$ [che ſi legge $a+c-x$ *tutto moltiplicato per tutto* $b-m$] indica il prodotto, che naſce moltiplicando la quantità $a+c-x$ per la quantità $b-m$.

Parimente $\overline{4a+b-am}\times c$ ſignifica il prodotto $4ac+bc-acm$, che ſi trova moltiplicando $4a+b-am$ per c.

Ma la quantità $a-m+b\times c$ (non tirando la linea ſopra la quantità compoſta) ſignifica ſoltanto $a-m+bc$.

Inoltre il prodotto delle quantità composte, massimamente per maggior facilità, e comodo della stampa, si esprime col chiudere tra parentesi il moltiplicatore, ed il moltiplicando; come $[a-c]$ $[m-x]$ significa il prodotto di $a-c$ moltiplicato per $m-x$.

Similmente $(a+b)\ m$ significa il prodotto di $a+b$ moltiplicato per m.

62. ANNOTAZIONE II. Essendo cosa noiosa, e molesta il ripetere più d' una volta la stessa lettera nel medesimo prodotto di quantità semplici; perciò siccome nell' addizione (n. 51), la somma $a+a$ più brevemente si esprime per $2a$, e la somma $b+b+b$ per $3b$ ec.; così ancora nella moltiplicazione delle quantità il prodotto aa si esprime per a^2, scrivendo cioè il numero 2 alla destra, ed alquanto sopra la lettera a; il prodotto aaa esprimesi per a^3 ec. Parimente b^4 significa il prodotto $bbbb$ nato dal moltiplicare b in b in b in b, e così delle altre quantità.

Se dunque c significherà 3; c^2, ossia $c \times c$ esprimerà il numero 9; c^3, vale a dire $c \times c \times c$, significherà 27; ec.

63. I numeri poi, che sono scritti alla destra, ed alquanto sopra delle lettere si chiamano *indici*, o *esponenti* delle medesime quantità moltiplicate per se stesse una o più volte.

64. Quelle quantità, le quali non hano veruno esponente, sempre s' intende, che abbiano l' unità per esponente. Cosi a significa a^1, m significa m^1; $b\ c$ vale $b^1\ c^1$ ec.

65. Quando si dovranno moltiplicare tra di loro quantità espresse dalle medesime lettere, allora si sommino

gli esponenti di esse, e si avrà il prodotto delle medesime quantità.

Si debba moltiplicare a^3 per a^2, il prodotto sarà a^{3+2}, cioè a^5.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè a^3 (n. 62) significa aaa, a^2 aa, ma moltiplicando aaa per aa, il prodotto si esprime [n. 58 .] per $aaaaa$, il qual prodotto più semplicemente [n. 62] si esprime per a^5. Dunque moltiplicando a^3 per a^2, il prodotto sarà a^5. Per la qual cosa la somma degli esponenti indica il prodotto delle quantità espresse dalle medesime lettere.

Sicchè moltiplicandosi b^4 per b^3, il prodotto sarà b^7 : moltiplicando a, cioè (n. 64) a^1 per a^7, il prodotto sarà a^8.

Parimente moltiplicando a^3b^5 per a^4b^3, il prodotto sarà a^7b^8.

Similmente la quantità $4ab^8x$ moltiplicata per $3a^4b^3m$, ne dà il prodotto $12a^5b^{11}mx$.

Dunque quando le quantità da moltiplicarsi insieme sono di già state prodotte dalla moltiplicazione di più quantità, allora solamente si deono sommare insieme gli esponenti delle quantità espresse dalle medesime lettere. Così dovendosi moltiplicare a^4c^2 per a^2bx^3 per ac^4, il prodotto sarà $a^7bc^6x^3$.

Generalmente moltiplicando a^m per a^n, il prodotto sarà a^{m+n} le lettere m, ed n esprimendo numeri

indeterminati; perciò ſe m ſignificherà 5, ed n il 3, allora a^{m+n} eſprimerà a^8; ſe ſarà $m=4$, ed $n=2$, allora ſarà $a^{m+n}=a^6$ ec.

66. ANNOTAZIONE III. Dalle coſe ſtabilite negli antecedenti numeri, e nel paragrafo ſecondo del numero 51, chiaramente ſi vede eſſervi grandiſſima differenza tra una quantità, che abbia qualſivoglia numero per eſponente, e la ſteſſa quantità, che abbia il medeſimo numero per coefficiente; poichè l' eſponente indica moltiplicazione, ed il coefficiente ſignifica ſomma della ſteſſa quantità.

Così molto diverſe ſono, e diſuguali le quantità $2a$ ed a^2; $3a$, ed a^3, ec.; imperciocchè ſupponiamo che a ſignifichi il numero 5; ſia cioè $a=5$, allora (n. 23) ſarà $2a=10$, $3a=15$, $4a=20$, ec. ma a^2, cioè $a\times a$ significherà 5×5, cioè 25; a^3, o ſia $a\times a\times a$ equivalerà al $5\times5\times5$, cioè al 125, ed a^4 ſignificherà 625, ec.

Similmente facendo $m=10$, ſarà $2m=20$, $3m=30$, $4m=40$, ec. ma ſarà $m^2=100$, $m^3=1000$, $m^4 10000$, ec.

PROBLEMA DECIMO.

67. Dividere le algebraiche quantità.

RISOLUZIONE. I. Nella diviſione della quantità, totalmente come nella moltiplicazione (nn. 55, 56), i ſegni ſimili, e medeſimi danno + nel quoziente, ed i ſegni contrari danno −; vale a dire dividendo + per +, o − per −, ſempre al quoziente ſi preponga il ſe-

gno +; ma dividendo + per −, ovvero − per +, ſempre al quoziente ſi prefigga il ſegno −.

II. Se le quantità avranno de' numeri coefficienti, ſi dividano eſſi ſeparatamente ſecondo le regole dell' aritmetica volgare.

68. III. Si tolgano dalla quantità dividenda tutte quelle lettere, le quali ſono anche contenute nel diviſore, e ſi avrà il ricercato quoziente.

Come dividendo ab per a, il quoziente ſarà b; perchè moltiplicando il quoziente b pel diviſore a, il prodotto reſtituiſce la quantità dividenda ab.

$$ab \mid a \quad ; \quad b$$

Similmente dividendo $aacx$ per $-ac$, il quoziente ſarà $-ax$; poichè $-ax \times -ac$ reſtituiſce la quantità dividenda $aacx$.

Medeſimamente dividendo $15abm$ per $3ab$, il quoziente ſarà $5m$; perciocchè $5m \times 3ab$ reſtituiſce $15abm$.

$$15abm \mid 3ab \quad ; \quad 5m$$

69. 4. Quando accade, che la dividenda quantità non contiene tutte le lettere, che ſono nel diviſore, allora il quoziente ſi eſprima con una frazione, il cui numeratore ſia la quantità dividenda, ed il denominatore ſia il diviſore.

Così dividendo a per x, il quoziente ſarà $\frac{a}{x}$; e dividendo c per $-m$, il quoziente ſi eſprimerà ſcrivendo

$\frac{c}{-m}$, ovvero $-\frac{c}{m}$.

Volendo dividere $6am$ per $3x$, il quoziente ſarà $\frac{6am}{3x}$, ovvero $\frac{2am}{x}$, oppure $2\frac{am}{x}$, perchè il coefficiente 6 ſi divide in interi pel coefficiente 3.

Similmente dividendo acx per mx, il quoziente sarà $\frac{acx}{mx}$.

70. V. Se le lettere comuni al divisore, e al dividendo avranno numeri esponenti [n. 63] allora si sottragga l' esponente del divisore dall' esponente del dividendo, ed il residuo sarà l' esponente del quoziente.

Così dividendo c^5 per c^3, il quoziente sarà c^{5-3}, cioè c^2.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè c^5 (n. 62) significa $ccccc$, e c^3 equivale alla quantità ccc; ma dividendo $ccccc$ per ccc, il quoziente [n. 68] sarà cc, cioè c^2 (n. 62), dunque quando le quantità espresse dalle medesime lettere hanno degli esponenti, la divisione si dee fare sottraendo gli esponenti del divisore dagli esponenti della quantità dividenda, e porre i residui per esponenti del quoziente.

Dividendo $8a^3b^4c$ per $4a^3b^2c$, si ottiene il quoziente $2b^2$; perchè $2b^2 \times 4a^3b^2c$ restituisce $8a^3b^4c$.

Parimente dividendo $-a^7$ per $-a^3$, il quoziente sarà $+a^4$, o sia a^4, poichè $a^4 \times -a^3$ restituisce $-a^7$.

Ma dividendo a^3 per a^5, il quoziente sarà a^{3-5}, cioè a^{-2}; poichè moltiplicando il divisore a^5 pel quoziente a^{-2}, il prodotto sarà a^{5--2} [n. 65], cioè a^3, che restituisce la quantità dividenda.

Per la ſteſſa ragione dividendo c^4 per c^7, il quoziente ſarà c^{4-7}, vale a dire c^{-3}; eſſendo che $c^{-3} \times c^7$ produce c^{7-3}, cioè c^4.

Generalmente dividendo a^m per a^n, il quoziente ſempre ſarà a^{m-n}; perciocchè $a^{m-n} \times a^n$ produce a^{m-n+n}, cioè reſtituiſce a^m.

71. Qualſivoglia quantità diviſa per ſe ſteſſa ſempre dà per quoziente l' unità; imperciocchè qualſivoglia grandezza intera, o rotta, o miſta, o ſemplice, o compoſta contiene ſe ſteſſa una volta; perciò dividendoli a per a, il quoziente ſarà 1; perchè il quoziente 1 moltiplicato pel diviſore a reſtituiſce la quantità dividenda $1a$, o ſia a.

Per la ſteſſa ragione dividendo $5b$ per $5b$, o $4ax$ per $4ax$, o $7a^3c$ per $7a^3c$, ovvero a^2-c per a^2-c, ec. il quoziente ſarà ſempre 1, come evidentemente ſi vede.

72. Quindi ne viene in conſeguenza, che ogni quantità, la quale abbia per eſponente la cifra 0, ſignificherà 1; per eſempio a^0 ſignifica 1; poichè dovendo dividere, verbigrazia, la quantità a^3 pel diviſore a^3, ſecondo la regola ſtabilita al numero 70, ſi dee ſottrarre l' eſponente 3 del diviſore dall' eſponente 3 della quantità dividenda, ed il reſiduo 0 ſi dee porre per eſponente del quoziente; onde dividendo a^3 per a^3 il quoziente ſarà a^{3-3}, cioè a^0. Ma per l' antecedente numero, qualſivoglia quantità diviſa per

se stessa, dà per quoziente l' unità, perciò dividendo a^3 per a^3 il quoziente è 1. Dunque a^0 significa 1.

Per la stessa ragione tutte le quantità 6^0, c^0, m^0, x^0; ec., significano 1.

Medesimamente la quantità a^0x^0 significa 1; perchè a^0x^0 vale lo stesso, che $a^0 \times x^0$, cioè 1×1, o sia 1.

Per la qual cosa dividendo a^3b per a^2b, cioè a^3b^1 per a^2b^1, il quoziente sarà ab^0, o sia $a^1 \times b^0$ cioè $a^1 \times 1$, il quale significa $1a^1$, o sia a.

Perciò ordinariamente si omettono quelle lettere, alle quali rimane l' esponente 0, massimamente quando da altre quantità sono moltiplicate; come dividendo $a^4c^3m^2x$ per $a^2c^3m^2$, il quoziente si esprimerà [n. 68] per a^2x, tralasciando di scrivervi c^0m^0, che significano 1; il quale moltiplicando qualunque quantità non la cangia di valore.

73. RISOLUZIONE II. Quando una quantità complessa dovrà dividersi per una semplice, allora si scrivano primieramente le date quantità, come si è detto nel primo esempio del quinto problema. Quindi ciascun termine della quantità composta si divida pel dato divisore, come si può vedere ne' seguenti esempi.

Sia la quantità dividenda $ab+ac-ax$, e 'l divisore sia a. Posto il divisore a alla destra della quantità dividenda, dopo la linea divisoria, e tirata l' altra

$$ab+ac-ax \;\Big|\; \frac{a}{b+c-x}$$

linea ſotto di eſſo, in primo luogo ſi divida ab per a, ed il quoziente b ſi ſcriva ſotto al diviſore per primo termine del quoziente. Di poi ſi divida il ſecondo termine $+ac$ per a, ed il quoziente $+c$ ſcrivaſi per ſecondo termine del quoziente. Finalmente dividaſi $-ax$ per a, ed il quoziente $-x$ mettaſi per terzo termine del quoziente; conſeguentemente ſarà $b+c-x$ il quoziente, che ritrovaſi dividendo $ab+ac-ax$ per a. Imperciocchè moltiplicando eſſo quoziente $b+c-x$ per a, il prodotto $ab+ac-x$ reſtituiſce la quantità dividenda.

Similmente dividendo $8ab-12am+4a$ per $4a$, ſi troverà il quoziente $2b-3m+1$.

$$\begin{array}{l|l} 8ab-12am+4a & 4a \\ \hline & 2b-3m+1 \end{array}$$

Parimente dividendo la quantità $6acm-9acb-3ac+12acx$ per $3ac$, ſarà $2m-3b-1+4x$ il quoziente.

$$\begin{array}{l|l} 6acm-9acb-3ac+12acx & 3ac \\ \hline & 2m-3b-1+4x \end{array}$$

Medeſimamente dividendo $3ab-bc-3b+bm$ per $-b$, ſi otterrà il quoziente $-3a+c+3-m$.

74. Che ſe la compoſta quantità dividenda avrà de' termini, i quali non ſi poſſono dividere in interi dal dato diviſore, in tal caſo la diviſione di eſſi termini ſi faccia a modo di frazione.

Come dividendo $ac-cm+ab-x$ per c, il quoziente ſarà $a-m+\frac{ab-x}{c}$

Per la ſteſſa ragione dividendo la grandezza $a+bc-x$ per m, il quoziente ſarà $\frac{a}{m}+\frac{bc}{m}-\frac{x}{m}$, ovvero $\frac{a+bc-x}{m}$.

Lo ſteſſo s'intenda di altre ſimili quantità.

75. RISOLUZIONE. III. Finalmente dovendosi dividere una quantità composta per un' altra composta grandezza, allora si scrivano le date quantità, come si disse nella divisione de' numeri al primo esempio del problema quinto [n. 47]; quindi si operi a un di presso come nella divisione de' numeri. Gli esempi seguenti rischiareranno il tutto.

$$\begin{array}{l|l} ab+am-ax & b+m-x \\ \hline -ab-am+ax & a \end{array}$$

Sia da dividersi la quantità $ab+am-ax$ per $b+m-x$; primieramente dividasi il termine ab pel termine corrispondente b del divisore, ed il quoziente a scrivasi sotto la linea tirata sotto al divisore $b+m-x$; poscia si moltiplichi il ritrovato quoziente a in tutto il divisore $b+m-x$, ed il prodotto $ab+am-ax$ si sottragga dalla quantità dividenda, scrivendo $-ab-am+ax$ sotto, o dopo la stessa quantità dividenda $ab+am-ax$, ed il residuo sarà $ab+am-ax-ab-am+ax$ uguale zero, perchè (n. 51) i termini $+ab$, $-ab$, $+am$, $-am$, e $-ax$, $+ax$ vicendevolmente si distruggono, e nulla vi rimane; laonde il quoziente di questa divisione è a, perchè moltiplicando a pel divisore $b+m-x$, il prodotto $ab+am-ax$ restituisce la quantità dividenda.

Lo stesso quoziente a si sarebbe ottenuto, se si fosse diviso il secondo termine am pel corrispondente termine m del divisore, o pure si fosse diviso il $-ax$ per $-x$, e ciò perchè i termini del divisore sono ugualmente contenuti nei corrispondenti termini della dividenda quantità.

76. Dunque quando i termini del divisore sono ugualmente contenuti nei termini corrispondenti della quantità dividenda, siamo in libertà d' intraprendere la divisione per qual termine piace del divisore, il qual termine preso una volta, sempre si dee adoperare, nè mai si può cangiare nel corso dell' operazione, come si vedrà nel seguente esempio.

Sia da dividersi la quantità $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ per $a + b - c$, le quali si scrivano come sopra si è detto; quindi s' istituisca la divisione per qual termine piace del divisore, esempigrazia per a, dividasi perciò a^2 per a; il quoziente (n. 70.) sarà a, il quale si scriva per primo termine del quoziente sotto al divisore, e si moltiplichi esso quoziente a per tutto il divisore, ed il

$$\begin{array}{l|l} a^2 - b^2 + 2bc - c^2 & a + b - c \\ \cline{2-2} -a^2 - ab + ac & a - b + c \\ \cline{1-1} -b^2 + 2bc - c^2 - ab + ac & \\ +ab + b^2 - bc & \\ \cline{1-1} bc - c^2 + ac & \\ -ac - bc + c^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

prodotto $a^2 + ab - ac$ si sottragga dalla quantità dividenda, cioè cangiati i segni si scriva $-a^2 - ab + ac$ dopo, o sotto la quantità dividenda $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$, il residuo sarà $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 - a^2 - ab + ac$, e tolti i termini $+a^2$, $-a^2$, che si distruggono l'uno l'altro, rimarrà la quantità dividenda $-b^2 + 2bc - c^2 - ab + ac$, della quale si divida il termine $-ab$ per l' assunto termine a del divisore, ed il quoziente [nn. 67 68] sarà $-b$, il quale scrivasi per secondo termine del quoziente; e si moltiplichi esso $-b$ nel divisore $a + b - c$, ed il prodotto $-ab - b^2 + bc$ sottraggasi dalla quantità dividenda scrivendo sotto di essa $+ab + b^2 - bc$, il residuo sarà $-b^2 + 2bc - c^2 - ab + ac + ab + b^2 - bc$, e ridottolo a mi-

nori termini [n. 51], rimarrà $bc-c^2+ac$ la quantità dividenda, della quale dividasi il termine $+ac$ per l' assunto termine a del divisore, e sarà $+c$ il quoziente, il quale mettasi per terzo termine del ricercato quoziente, indi si moltiplichi nel divisore $a+b-c$, ed il prodoto $ac+bc-c^2$ sottraggasi dalla quantità dividenda $bc-c^2+ac$, ed il residuo sarà $bc-c^2+ac-ac-bc+c^2$ uguale al nulla, perchè $+bc$, $-bc$, $+c^2$, $-c^2$, e $+ac$, $-ac$ si distruggono vicendevolmente. Sicchè sarà $a-b+c$ il quoziente di questa divisione; perciochè moltiplicando $a-b+c$ nel divisore $a+b-c$, il prodotto $a^2-ab+ac+ab-b^2+bc-ac+bc-c^2$ ridotto a minori termini [n. 51.] ci restituisce la quantità dividenda $a^2-b^2+2bc-c^2$.

77. Ma quando il divisore ha de' termini, che non sono ugualmente contenuti ne' corrispondenti termini della quantità dividenda, allora la divisione s' istituisca sempre per quel termine, che sarà contenuto più volte, o almeno intere volte ne' termini della quantità dividenda.

Per esempio dovendo dividere $c^3-3c^2x+3cx^2-x^3$ per $c^2-2cx+x^2$, in questo caso la divisione si può ugualmente intraprendere per c^2, o per x^2, perchè questi due termini sono contenuti ugualmente ne' ter-

$$\begin{array}{l|l} c^3-3c^2x+3cx^2-x^3 & c^2-2cx+x^2 \\ \cline{2-2} -c^3+2c^2x-cx^2 & c-x \\ \hline -c^2x+2cx^2-x^3 & \\ +c^2x-2cx^2+x^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

mini loro corriſpondenti c^3 , e $-x^3$, mà non mai c^2 iſtituiſca per $2cx$, perchè non ſi ritroverebbe in interi il ricercato quoziente $c-x$; anzi ne naſcerebbe una ſerie infinita di termini decreſcenti , la quale però , come ſi vedrà nell' annotazione alla propoſizione 20 del lib. 1. della Geometria , uguaglierà il ſuddetto quoziente $c-x$.

Sicchè dividendo c^3 per c^2 , il quoziente ſarà c, il quale moltiplicato per tutto il diviſore $c^2-2cx+x^2$ e ſottratto il prodotto dalla quantità dividenda , reſterà la quantità dividenda $-c^2x+2cx^2-x^3$, della quale , dividendo il termine $-c^2x$ per l' aſſunto termine c^2 del diviſore, ſi avrà $-x$ per ſecondo termine del quoziente ; e perchè , moltiplicato $-x$ in tutto il diviſore, e ſottratto il prodotto dalla quantità dividenda , nulla vi rimane; perciò ſarà $c-x$ il quoziente di queſta diviſione .

78. Se dopo fatta la diviſione vi rimane nella quantità dividenda qualche termine , che non ſi poſſa dividere per l' aſſunto termine del diviſore , allora quell' avanzo ſi ſcriva dopo del ritrovato quoziente con tutti i ſuoi ſegni per numeratore di una frazione , e per denominatore di eſſa ſi metta tutto il diviſore .

Sia da dividerſi la quantità a^2+c^2 pel diviſore $a-c$; ſi divida a^2 per a, ed il quoziente a ſi moltiplichi nel diviſore $a-c$, ed il prodotto a^2-ac ſi ſottragga dalla quantità di-

$$
\begin{array}{l|l}
a^2+c^2 & a-c \\
\hline
-a^2+ac & a+c+\dfrac{2c^2}{a-c} \\
\hline
c^2+ac & \\
-ac+c^2 & \\
\hline
2c^2 &
\end{array}
$$

videnda a^2+c^2, il residuo sarà $a^2+c^2-a^2+ac$, cioè sarà [n. 51.] c^2+ac; di questo residuo si divida il termine $+ac$ per l' assunto termine a del divisore, sarà $+c$ il quoziente, che moltiplicato nel divisore $a-c$, e sottratto il prodotto $ac-c^2$ dalla quantità dividenda c^2+ac, il residuo sarà $c^2+ac-ac+c^2$, vale a dire [n. 51.] $2c^2$, il quale non si può in interi dividere pel termine assunto a del divisore, perció nel quoziente dopo $a+c$ si aggiunga per terzo termine $+\frac{2c^2}{a-c}$ e sarà $a+c+\frac{2c^2}{a-c}$ il quoziente di questa divisione.

79. Se verun termine della quantità dividenda si potrà dividere in interi da niun termine del divisore, allora il quoziente si esprimerà con una frazione, il cui numeratore sia la quantità dividenda, ed il denominatore sia il divisore; come dividendo $ab+a^2$ per $m-x$, il quoziente sarà $\frac{ab+a^2}{m-x}$.

80. Inoltre la divisione delle quantità composte alcune volte si esprime ancora chiudendo tra parentesi il dividendo, e poi il divisore, e frapponendovi due punti tra di essi.

Così $[a+b]:[c-x]$, che leggesi $a+b$ *diviso per* $c-x$, significa il quoziente $\frac{a+b}{c-x}$.

Parimente $(ab-x):m$, significa la stessa cosa, che $\frac{ab-x}{m}$.

ELEMENTI

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE.

LIBRO SECONDO.

DEL CALCOLO DELLE FRAZIONI.

DEFINIZIONE I.

81. *Parte aliquota* di qualsivoglia quantità dicesi quella, che presa alcune volte uguaglia il suo tutto, cioè la quantità, di cui essa è parte. Ovvero è quella, per cui dividendo la data quantità, si ottiene un quoziente intero, senza veruna frazione.

Così il 3 è parte aliquota del 18, perchè il 3 replicato 6 volte uguaglia il 18; o sia perchè il 3 è un' intera sesta parte dello stesso numero 18.

Similmente il 5 è parte aliquota del 15, perchè dividendo il 15 pel 5, il quoziente è il numero intero 3; o perchè il 5 è l'intera terza parte del 15.

Per la stessa ragione c è parte aliquota di acm, perchè dividendo acm per c, il quoziente è l' intera quantità am.

Ma *parte aliquanta* di qualunque quantità si chiama quella parte, la quale ripetuta intere volte non uguaglia quel tutto, di cui essa è parte, ma, o lo supera, o manca da esso; ovvero si dice quella, per la quale non si può dividere in interi il suo tutto. Il numero 4 è parte aliquanta del numero 14, perchè il numero 4 replicato tre volte manca dal 14, e replicato quattro volte lo supera; o sia perchè dividendo il 14, per 4. non si ha per quoziente un numero intero.

DEFINIZIONE II.

82. Un *numero* dicesi *misurare un altro numero*, quando esso replicato alcune volte uguaglia l' altro; quando cioè è parte aliquota dell' altro numero.

Perciò la *misura di un numero* è un altro numero, che sia parte aliquota di esso, cioè, che intere volte replicato lo uguagli. Così il numero 3 ripetendolo quattro volte misura il 12. Similmente il 2, il 4, il 5, il 10 sono misure del numero 20.

Massima misura di un numero si chiama il numero più grande di tutti quelli, che lo misurano. Per esempio, le misure del numero 12 sono 1, 2, 3, 4, 6, delle quali la massima è il numero 6, come evidentemente si vede.

DEFINIZIONE III.

83. M*isura comune di due o più numeri* è quel numero, che è parte aliquota di ciascuno de' dati numeri. Il numero 3 è misura comune de' numeri 6, 12, 15, 21, perchè separatamente misura ciascuno di essi. Per la stessa ragione il numero 2 è misura comune di tutti i numeri pari [n. 20.]; e l' unità è misura comune di tutti i numeri razionali interi.

DEFINIZIONE IV.

84. *Numero primo in se stesso, o incomplesso* chiamasi ogni numero, che abbia per misura la sola unità. Come i numeri 2, 5, 7, 11, 13, ciascuno de' quali non ha altra misura fuorchè l' unità, sono numeri primi in se stessi, o sia incomplessi.

DEFINIZIONE V.

85. *Numero composto in se stesso* dicesi ogni numero, il quale, oltre all' unità, abbia qualche altro numero, che lo misuri. Il 6 è numero composto, perchè oltre all' unità ha per misura il 2, il 3.

DEFINIZIONE VI.

86. *Numeri primi fra loro, o incomplessi tra di loro* sono quelli, che non hanno veruna misura comune, eccettuatane l' unità. I numeri 8, e 15 paragonandoli insieme sono numeri primi fra loro, perchè nessun numero li misura tutti due, fuorchè l' unità.

Similmente i numeri 5, 6, 12, 17, sono numeri primi fra loro, quando insieme si considerano, perchè non hanno veruna comune misura, eccettuatane l' unità.

DEFINIZIONE VII.

87. *Numeri fra loro composti* sono quelli, che oltre all' unità hanno qualche numero, che li misura. Come i numeri 6, 12, 15, 21 sono composti tra di loro, perchè hanno la comune misura 3.

88. COROLLARIO. Perchè ogni numero preso una volta, misura se stesso, perciò la comune misura di due,

o più numeri tra di loro composti, può essere uno de' medesimi numeri.

Per la qual cosa i numeri 5, 15, 20 sono fra loro composti, perchè il 5 misura se stesso, e misura gli altri due 15, e 20.

DEFINIZIONE VIII.

89. *Massima comune misura di due, o più numeri* è il massimo numero, che misura ciascuno di essi; o pure è quel numero, pel quale dividendo ciascuno di essi, i quozienti, che ne nascono sono numeri primi fra loro. I due numeri 12, e 18 hanno per comuni misure l' 1, il 2, il 3, ed il 6, e, come ognun vede, la massima comune misura di essi è il 6; e dividendo il 12, ed il 18 pel 6, i quozienti 2, e 3 sono numeri primi tra di loro.

DEFINIZIONE IX.

90. *Una frazione* (nn. 10, 11, 34) dicesi *ridotta alla minima denominazione*, *o alla minima espressione*, o sia *a minimi termini*, quando il numeratore, ed il denominatore di essa sono numeri primi fra loro [n. 86.], come la frazione $\frac{4}{5}$.

Similmente le frazioni $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$ ec. sono ridotte alla minima denominazione.

DEFINIZIONE X.

91. *Frazioni, o rotti, della stessa denominazione, o dello stesso nome*, si dicono quelle, che hanno lo stesso

denominatore; come le frazioni $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, ovvero $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{x}{m}$, ec.

Frazioni poi *di diversa denominazione*, *o di diverso nome* sono quelle, che hanno i denominatori differenti, come sono le frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ o le frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{a}{x}$, ec.

Frazioni decimali si chiamano quelle, le quali hanno per loro denominatori i numeri 10, 100, 1000, 10000, 100000 ec.; tali sono le frazioni $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{100}$ $\frac{45}{1000}$, ec.

DEFINIZIONE XI.

92. Tutto ciò, che esiste, o si concepisce, che possa avere esistenza, dicesi, *Cosa*; *una cosa* poi si dice *riferirsi, o aver relazione ad un' altra cosa*, quando insieme considerandole amendue, accade, che tra le proprietà, le quali assolutamente convengono ad una di esse, se ne trova alcuna, per mezzo della quale noi possiamo conchiudere, che all' altra cosa convenga qualche proprietà accidentale, che senza della prima non le conveniva. Si prendano esempigrazia i due numeri 5, ed 8; considerando il numero 8 in se stesso si troverà, che l' 8 è uguale al $7+1$; $8=6+2$; $8=5+3$; $8=4+4$ ec.; ma insieme considerando i numeri 5, ed 8, perchè è $8=5+3$, subito si compren-

de, che il 5 è parte dell' 8; ed allora si riferisce il 5 all' 8.

DEFINIZIONE XII.

93. Ciò poi, che ad una data cosa assolutamente non conviene, ma soltanto convenirle si conosce quando essa si riferisce ad un' altra cosa, dicesi *relazione*, o *abitudine*. Così del numero 5 considerato in se stesso, non si concepisce, che esso sia minore dell' 8, se non quando si riferisce, o paragona il 5 all' 8; nè tampoco del numero 8 considerato in se stesso, si concepisce, che sia maggiore del numero 5 se non quando l' 8 si riferisce al 5. Ora poi l' essere parte del numero 8, o esser minore di esso, è una relazione; siccome ancora è una relazione l' essere maggiore del numero 5.

DEFINIZIONE XIII.

94. *Ragione geometrica* è quella relazione di una cosa ad un' altra dello stesso genere, la quale determina la grandezza dell' una dalla quantità dell' altra, senza che faccia d' uopo prendere una terza cosa omogenea. Siano, esempigrazia, due lunghezze, delle quali la prima si chiami A, e sia piedi 4, e l' altra B sia di 20 piedi; se si riferisce, o paragona l' A al B, cioè se si prende per misura la lunghezza A di 4 piedi, si troverà, che la lunghezza A è contenuta cinque volte nella lunghezza B di 20 piedi; e perciò sarà la lunghezza A alla lunghezza B come uno al cinque, vale a dire la lunghezza A sarà la quinta parte della lunghezza B. Ma paragonando il B all' A, cioè prendendo per misura la lunghezza B, allora si troverà, che la lunghezza B contiene cinque volte la lunghezza A;

e però la lunghezza B ſtarà alla lunghezza A come cinque all' uno, ſarà cioè, la lunghezza B quintupla della lunghezza A. Che peró tanto la relazione della lunghezza A alla lunghezza B, quanto la relazione della lunghezza B alla lunghezza A ſi è determinata ſenza prendere un' altra lunghezza, conſeguentemente ſono due ragioni geometriche A al B, e B all' A, ovvero 4 al 20, e 20 al 4.

95. COROLLARIO. In ogni frazione il denominatore [n. 11.] ſignifica l'unità, o ſia un tutto diviſo in parti, ed il numeratore numera quante di quelle parti, nel dato caſo, ſi deono prendere; perciò la relazione del numeratore al denominatore ſi conoſce, ſenza che faccia d'uopo prendere un' altra quantità omogenea al numeratore, e denominatore; dunque ogni frazione è una geometrica ragione.

DEFINIZIONE XIV.

96. In ogni ragione geometrica le quantità, che tra di loro ſi paragonano diconſi *termini della ragione*, de' quali il primo, cioè quello, che all' altro ſi riferiſce, ſi noma *antecedente della ragione*; ed il ſecondo, al quale il primo ſi rapporta, ſi chiama *conſeguente della ragione*.

Come della ragione 12 al 4, il termine 12 è antecedente, ed il 4 è il termine conſeguente della medeſima ragione.

Similmente della ragione *a* al *b*; *a* è antecedente, e *b* è conſeguente.

Il ſegno, di cui ci ſerviamo per eſprimere qualſivoglia ragione geometrica, ſono due punti poſti fra l' antecedente, ed il conſeguente, e ſignificano *al*. Così 12:3 ſi legge *dodici al tre*. Parimente $c:m$ ſi legge *c al m*.

DEFINIZIONE XV.

97. Il quoziente, che nasce dividendo l' antecedente di qualsivoglia ragione geometrica pel suo conseguente, si chiama *nome della ragione*, ovvero *valore della ragione*, o pure *esponente della ragione*.

Che però della ragione 8:2 il nome, o valore sarà $\frac{8}{2}$, cioè 4; e della ragione 2:8 sarà $\frac{2}{8}$, che significa un quarto.

Similmente della ragione $ab:a$, il valore sarà $\frac{ab}{a}$, cioè b; e della ragione $m:c$ il valore, o esponente sarà $\frac{m}{c}$, e così delle altre.

98. COROLLARIO. Quindi ne viene, che qualsisia ragione geometrica è uguale ad una frazione, la quale abbia per numeratore l' antecedente della ragione, e per denominatore il conseguente della stessa ragione [n. 96.].

Vicendevolmente qualsivoglia frazione è uguale ad una ragione geometrica, il cui antecedente sia il numeratore della frazione, ed il conseguente sia il denominatore della stessa frazione. Imperciocchè data la ragione 8:2, il suo valore [n. 97.] è la frazione $\frac{8}{2}$ cioè 4. Scambievolmente data la frazione $\frac{8}{2}$, si forma l' uguale ragione 8:2, il cui valore si è 4.

DEFINIZIONE XVI.

99. *Ragioni geometriche ſimili*, o *uguali* diconſi quelle, che hanno i valori uguali, cioè quelle, i cui antecedenti hanno lo ſteſſe rapporto ai loro propri conſeguenti. Le ragioni 6:2, 15:5 ſono fra loro uguali, perchè [n. 97.] hanno lo ſteſſo nome, o valore 3, eſſendo $\frac{6}{2}=3$, e $\frac{15}{5}=3$; o perchè il 6 è triplo del 2, ſiccome il 15 è triplo del 5.

Ragioni geometriche diſuguali ſono quelle, le quali hanno valori ineguali; o quelle gli antecedenti delle quali non hanno la medeſima relazione ai loro conſeguenti. Le due ragioni 8:2, 20:10 ſono ineguali, perchè il valore della prima è $\frac{8}{2}$, cioè 4, e dell'altra è $\frac{20}{10}$ cioè 2; perciò la ragione 8:2 è maggiore della ragione 20:10, eſſendo $\frac{8}{2}>\frac{20}{10}$, cioè $4>2$.

100. COROLLARIO I. Poichè le frazioni ſono geometriche ragioni (n. 98.); perciò *frazioni uguali* ſono quelle, che formano ragioni geometriche uguali; oſſia quelle, i numeratori delle quali hanno la ſteſſa relazione, o rapporto ai loro denominatori. Le due frazioni $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{15}$ ſono uguali, perchè il numeratore 2 è il terzo del ſuo denominatore 6, come il numeratore 5 è la terza parte del ſuo denominatore 15; ovvero perchè l'una, e l'altra frazione ſignifica la terza parte d'un intero.

Frazioni disuguali si dicono quando formano ragioni geometriche ineguali, o sia quando i numeratori di esse non hanno la stessa relazione ai loro denominatori. Così la frazione $\frac{3}{6}$, la quale significa tre seste parti, cioè la metà d'un intero, è maggiore della frazione $\frac{5}{15}$, la quale significa cinque quindicesime parti d'un intero, o sia un terzo dell'intero medesimo.

Per la qual cosa ragioni geometriche uguali formano frazioni uguali, vicendevolmente le frazioni uguali costituiscono geometriche ragioni uguali.

101. COROLLARIO II. Dal fin qui detto facilmente si può comprendere, che moltiplicando, o dividendo il numeratore, ed il denominatore di qualsisia frazione per una medesima quantità, il valore della frazione non si cangia; imperciocchè lo stesso rapporto, che ha il numeratore al denominatore, l'avrà pure il doppio del numeratore al doppio del denominatore; il triplo del numeratore al triplo del denominatore; il quadruplo al quadruplo ec., e lo stesso rapporto avrà ancora la metà del numeratore alla metà del denominatore, il terzo del numeratore al terzo del denominatore ec. Se per esempio della frazione $\frac{4}{12}$ si moltiplicheranno il numeratore 4, ed il denominatore 12 per 2, si avrà un'altra frazione $\frac{8}{24}$ uguale alla frazione $\frac{4}{12}$; poichè il numeratore 8 è la terza parte del suo denominatore 24, come il 4 è un terzo del suo denominatore 12; ovvero perchè tanto le otto ventiquattresime parti d'

un intero, quanto le quattro dodicesime parti significano la medesima parte dell' intero, cioè la terza parte.

Che se il numeratore 4, ed il denominatore 12 si divideranno amendue per 2, i quozienti 2, e 6 formeranno la frazione $\frac{2}{6}$ uguale alla data frazione $\frac{4}{12}$; poichè due seste parti d' un intero significano ancora la terza parte del medesimo intero, come la significa il rotto $\frac{4}{12}$.

Medesimamente data la frazione $\frac{ab}{a}$, la quale (n. 68.) significa b, moltiplicando il numeratore ab, ed il denominatore a per la stessa quantità c, si avrà un' altra frazione $\frac{abc}{ac}$ uguale alla data $\frac{ab}{a}$, perchè tanto $\frac{ab}{a}$, quanto $\frac{abc}{ac}$ significano [n. 68.] la medesima quantità b.

Che se data la frazione $\frac{abc}{ac}$ si divideranno il numeratore abc, ed il denominatore ac per la stessa grandezza a, rimarrà la frazione $\frac{bc}{c}$ uguale alla frazione $\frac{abc}{ac}$, perchè e l' una, e l' altra significano la stessa quantità b.

ANNOTAZIONE. Siccome il numeratore d' una frazione rappresenta una quantità dividenda, della quale il denominatore ne è il divisore, però dalle antece-

denti nozioni ſi ricava, che nella divisione ſe si moltiplicheranno, o si divideranno per una medesima quantità il dividendo, ed il diviſore, facendo poſcia de' prodotti, o de' quozienti l' attuale divisione, il quoziente ſarà ſempre lo ſteſſo. Eſempigrazia si ottiene lo ſteſſo quoziente 4 a dividere il 48, per 12, ovvero il 96 doppio di 48, per 24 doppio di 12, o pure l' 8 ſeſta parte di 48, per 2 ſeſta parte del 12, ec.

DEFINIZIONE XVII.

102. L' *equazione* è il paragone, o confronto di due quantità uguali (n. 27.), il quale si fa col frapporre tra le due quantità uguali il ſegno = dell' uguaglianza.

Scrivendo $a=b$ abbiamo un' equazione, nella quale si eſprime, che il valore di a è uguale al valore di b.

Parimente l' equazione $4+3=12-5$ significa, che il valore $4+3$ uguaglia il valore $12-5$.

In ogni equazione la quantità poſta avanti al ſegno = si chiama *prima parte dell' equazione*, e quella, che ſta ſcritta dopo il ſegno, dicesi *ſeconda parte dell' equazione*.

ASSIOMA I.

103. Quelle coſe, che ſono uguali ad una terza, ſono parimente uguali tra di loro.

Sia $6-2=4$, e $7-3=4$, qer queſto aſſioma si dee conchiudere, che ſarà $6-2=7-3$.

Generalmente ſe ſarà $a=m$, e $b=m$, ſarà eziandio $a=b$.

2. Inoltre ciò, che è maggiore, o minore di una delle cose uguali, sarà anche maggiore, o minore dell' altra.

Sia per esempio $a=c$, se una terza quantità b sarà maggiore di a, essa b sarà anche maggiore di c; ma se la b invece di essere maggiore, sarà minore di a, sarà ancora essa b minore di c.

ASSIOMA II.

104. A cose uguali aggiugnendo cose uguali, o pure una stessa cosa, le somme saranno uguali.

Siano date le equazioni $a=c$, e $b=m$, aggiugnendo la prima alla seconda equazione, si avrà $a+b=c+m$.

Parimente se sarà $a=c-m$, ed a queste cose uguali si aggiunga la medesima quantità m, si avrà l' equazione $a+m=c-m+m$, cioè [n. 51.] sarà $a+m=c$.

ASSIOMA III.

105. Da cose uguali levando cose uguali, ovvero una stessa cosa, le rimanenti cose saranno ancora uguali fra loro.

Sia $a=b$, e $c=m$, per questo assioma sarà ancora $a-c=b-m$.

Similmente data l' equazione $b=a+m$, sottraendo da queste cose uguali la stessa quantità m, rimarrà l' equazione $b-m=a+m-m$; cioè $b-m=a$ [n. 51.].

106. COROLLARIO. Da questi due assiomi ne segue, che, data qualsivoglia equazione, se uno, o più termini di essa si trasporteranno da una parte nell' altra dell' equazione, cangiandovi peró i segni, cioè $+$ in $-$, e $-$ in $+$, le quantità rimarranno sempre uguali; perchè o si aggiungono cose uguali, a cose uguali,

quando si trasportano termini negativi, o si levano cose uguali da cose uguali, quando si trasferiscono termini positivi, come si può chiaramente vedere ne' seguenti esempi.

Sia l' equazione $7=12-5$, nella quale si trasferisca il -5 dalla seconda parte dell' equazione nella prima cangiandovi il segno $-$ in $+$, si avrà un' altra equazione $7+5=12$; perchè trasportare il -5 col segno cangiato egli è un aggiugner 5 a tutte due le parti dell' equazione.

Se poi data l' equazione $7+5=12$ si trasporterà il 7 dalla prima nella seconda parte dell' equazione cangiandovi [n. 35.] il segno $+$ in $-$, sarà nuova equazione $5=12-7$; quindi si vede, che trasportare il positivo 7 col segno cangiato, egli è un togliere lo stesso 7 da amendue le parti dell' equazione, cioè da cose uguali.

Similmente se nell' equazione $14=10+6-2$ si trasporteranno i due termini $+6-2$ dalla seconda nella prima parte, mutando i segni, ne verrà l' equazione $14-6+2=10$, come occularmente si vede.

Che se tutti i termini da una parte dell' equazione si trasferiranno nell' altra parte, variandogli i segni, allora l' equazione si ridurrà allo zero, la qual cosa dicesi *ridurre l' equazione alla cifra*.

Così nell' antecedente equazione $14=10+6-2$ trasportando tutti i termini dalla seconda nella prima parte, cangiandovi i segni, rimarrà l' equazione $14-10-6+2=0$.

Questo trasportare uno, o più termini da una parte dell' equazione nell' altra coi segni variati, che non mai toglie l' equazione, per gli assiomi secondo, e terzo, si chiama *Antitesi*. Laonde essendo $7-3=4$, sarà per antitesi $7=4+3$. Medesimamente essendo $a+c=m$,

per antitesi si avrà $a=m-c$, o pure riducendo alla cifra sarà $a+c-m=0$.

ASSIOMA IV.

107. Moltiplicando cose uguali per una terza, o per cose uguali, i prodotti saranno sempre uguali.

Sia l' equazione $6-2=4$, moltiplicando le uguali quantità $6-2$, e 4 per lo stesso numero 3, i due prodotti $18-6$, e 12 saranno pure uguali, cioè sarà nuova equazione $18-6=12$.

Medesimamente essendo l' equazione $a=c$, moltiplicandola per m si avrà $am=cm$.

Parimente se sarà $a=b$, e $c=m$, moltiplicando un' equazione per l' altra, cioè a per c, e b per m, i prodotti saranno anche uguali, vale a dire sarà $ac=bm$ ec.

ASSIOMA V.

108. Dividendo cose uguali per una terza, o per cose uguali, i quozienti saranno anche uguali. Come dividendo l' equazione $12-4=8$ pel numero 2, rimarrà $\frac{12}{2}-\frac{4}{2}=\frac{8}{2}$, cioè $6-2=4$.

Similmente dividendo l' equazione $ac=cm$ per c resterà $\frac{ac}{c}=\frac{cm}{c}$, cioè (n. 68.) $a=m$.

Per la stessa ragione, se avremo $a=b$, e $c=m$, dividendo la prima equazione per la seconda, per questo assioma resterà $\frac{a}{c}=\frac{b}{m}$.

ASSIOMA VI.

109. A cose disuguali aggiugnendo cose uguali, le somme, che si faranno, saranno disuguali.

Come ai numeri disuguali 8, e 4 aggiugnendovi lo stesso numero 2, le somme $8+2$, e $4+2$ saranno ineguali, cioè essendo $8>4$, sarà pure $8+2>4+2$, cioè $10>6$.

Similmente se saranno $a>c$, e $b=m$, per questo assioma sarà $a+b>c+m$.

ASSIOMA VII.

110. Dalle cose disuguali levando cose uguali, le rimanenti saranno ancora disuguali.

Sia $12>8$, sarà ancora $12-2>8-2$, cioè $10>6$.

Parimente se avremo $a>b$, e $c=m$, sarà eziandio $a-c>b-m$.

ASSIOMA VIII.

111. Quelle cose, che sono doppie, o triple, o quadruple ec., di una medesima, o di cose uguali, sono tra di loro uguali.

Sia a doppia di m, e c anche doppia della stessa m, sarà $a=c$.

ASSIOMA IX.

112. Quelle cose, che sono la metà, o la terza, o la quarta parte ec., di una stessa cosa, o di cose uguali, sono uguali fra loro.

Sia esempigrazia b quarta parte di m, ed a sia anche la quarta parte della medesima quantità m, sarà $a=b$.

ASSIOMA X.

113. Il tuttto è maggiore della ſua parte.

ASSIOMA XI.

114. Ogni tutto è uguale a tutte le ſue parti preſe inſieme.

115. ANNOTAZIONE. In queſto aſſioma intendiamo parlare di quelle parti, le quali attualmente ſono contenute nel tutto, non già di tutte le parti poſſibili di eſſo tutto. Per eſempio il 12 è compoſto dal 7, e dal 5, perciò abbiamo $12=7+5$; è altresì compoſto dal 10, e dal 2, e peró abbiamo ancora $12=10+2$, ec., ma quantunque il 7, ed il 10, aſſolutamente parlando, ſieno parti del 12; niuno mai potrà conchiudere, che il 12 ſia uguale al $7+10$; perchè le parti 7, e 10 non poſſono eſſere contenute inſieme nel tutto 12; poichè quando ſi prende il 10 per una parte del 12, allora oltre al 2, o all' $1+1$, niun' altra parte puó eſſere contenuta nello ſteſſo 12.

ASSIOMA XII.

116. Se di due quantità omogenee [n. 26], che ſi paragonano tra di loro, la prima non ſarà maggiore, nè minore dell' altra, ſarà neceſſariamente la prima uguale alla ſeconda.

Se la prima non ſarà uguale alla ſeconda, nè maggiore di eſſa, neceſſariamente ſarà la prima minore della ſeconda.

Finalmente ſe la prima non ſarà minore della ſeconda, nè uguale ad eſſa, allora ſarà la prima maggiore della ſeconda; e ció perchè le quantità omogenee ſono ſempre o diſuguali, o uguali fra loro.

ASSIOMA XIII.

117. Se una quantità sarà maggiore di un' altra, e questa seconda sia maggiore di una terza, allora la prima sarà molto maggiore della terza. Sia $a>c$, e $c>m$, sarà $a>m$.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

118. Quando si moltiplica una frazione pel suo denominatore, il prodotto sarà il numeratore della medesima frazione.

DIMOSTRAZIONE. Ogni frazione [come abbiamo osservato al paragrafo sesto del numero 47.] esprime il quoziente, che nasce dividendo il numeratore pel denominatore della medesima frazione, ma il quoziente di qualsivoglia divisione (nn. 49., 68., 69.) moltiplicato pel divisore restituisce la quantità dividenda; dunque moltiplicando la frazione, la quale esprime il quoziente, pel suo denominatore, il quale rappresenta il divisore, il prodotto sarà necessariamente il numeratore della frazione, il quale significa la quantità dividenda. Per la qual cosa a moltiplicare una frazione pel suo denominatore basta cancellare lo stesso denominatore, e rimarrà il numeratore per prodotto. La qual cosa si dovea dimostrare.

La frazione $\frac{12}{4}$ (la quale significa 3) moltiplicata per 4 dà il prodotto 12, che è il numeratore della frazione.

Moltiplicando la frazione $\frac{2}{3}$ per 3, il prodotto sarà 2; per esempio $\frac{2}{3}$ d' un soldo, che sono 8 denari, moltiplicati per 3 producono 24 denari, che sono soldi 2.

Parimente la frazione $\frac{a}{m}$ moltiplicata per m dà il prodotto a.

La frazione $\frac{c-b}{a+m}$ moltiplicata per $a+m$ produce $c-b$, ec.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

119. Dato un intero esprimerlo con una frazione, che abbia un dato denominatore.

RISOLUZIONE, e DIMOSTRAZIONE. Si moltiplichi l' intero dato pel dato denominatore, ed al prodotto si sottoscriva lo stesso denominatore.

Come a trasmutare l' intero 5 in una frazione, che abbia l' 8 per denominatore, si moltiplichi 5 nel 8, ed al prodotto 40 si sottoscriva lo stesso 8 per denominatore, e sarà la frazione $\frac{40}{8}$ uguale all' intero 5 (Probl. 5.).

Similmente a ridurre la quantità a in una frazione, che abbia il denominatore c, si operi come sopra, e sarà $\frac{ac}{c}$ la frazione ricercata, che ha il denominatore c, ed è uguale alla quantità a; poichè [n. 68.] $\frac{ac}{c}$ significa a.

Se c dovesse esprimersi con una frazione avente $a-m$ per denominatore; allora moltiplicata la c per $a-m$, ed al prodotto $ac-cm$ sottoscrittogli $a-m$ per denominatore, sarebbe, $\frac{ac-cm}{a-m}$ la frazione, che si cercava, essendo $\frac{ac-cm}{a-m}=c$ (n. 75.).

L' unità medesima si esprime con una frazione di qualunque dato denominatore, per esempio 7; moltiplicando 1 in 7, ed al prodotto 7 sottoscrivendo il denominatore 7, e si avrà $\frac{7}{7}=1$.

Per la medesima ragione sarà $\frac{12}{12}=1$; $\frac{a}{a}=1$; $\frac{cm}{cm}=1$; $\frac{a-c}{a-c}=1$, ec. [n. 71.].

120. COROLLARIO I. Dunque ogni frazione, la quale abbia il numeratore uguale al denominatore, sempre significherà un intero, perchè si prendono tutte le parti, nelle quali è diviso l' intero medesimo. Perciò ciascuna delle frazioni $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, ec., $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{c-x}{c-x}$ ec. significa 1.

Ma la frazione, che ha il numeratore maggiore del denominatore, significa più d' un intero. Come la frazione $\frac{5}{4}$ significa $1\frac{1}{4}$, cioè un intero, e di più la quarta parte d'un intero.

Similmente la frazione $\frac{17}{6}$ significa $2\frac{5}{6}$, cioè due interi, e cinque seste parti d' un intero ec.

Quando il numeratore è minore del denominatore, allora la ſrazione ſignifica meno d' un intero, ed è vera frazione, eſſendo le altre frazioni impropriamente dette. Come la frazione $\frac{2}{3}$, è vera frazione, ed eſprime due terze parti d' un intero diviſo in tre parti uguali.

121. COROLLARIO II. Se a qualſivoglia intero ſi ſottoſcrive per denominatore l' unità, ſi forma una frazione, o quaſi frazione, che ſempre è uguale allo ſteſſo intero. Così $\frac{4}{1}$ ſignifica 4; $\frac{10}{1}$ ſignifica 10; $\frac{a}{1}$ vale lo ſteſſo, che a; $\frac{c-m}{1}$ ſignifica $c-m$, ec. Perchè il porre l' unità per denominatore dell' intero è la ſteſſa coſa, che ridurre l' intero in una frazione, la quale abbia l' 1 per denominatore.

122. ANNOTAZIONE. La pratica di ridurre le miſure, i peſi, e le monete in altre di ſpecie minore ſi deduce da queſto problema. I denari noſtrali, verbigrazia, ſono parti dodiceſime del ſoldo; i ſoldi ſono parti venteſime della lira. Dunque per ridurre ſoldi 5 in denari, cioè in parti dodiceſime del ſoldo, ſi moltiplichi il 5 per 12, e ſaranno 60 denari, cioè ſeſſanta dodiceſime parti del ſoldo, le quali equivagliono a ſoldi 5; eſſendo $\frac{60}{12}=5$.

Similmente lire 4 d' argento ridotte in parti venteſime danno $\frac{80}{20}$, cioè 80 ſoldi.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

123. Ridurre le frazioni in interi.

RISOLUZIONE. Le frazioni impropriamente dette, cioè quelle, che hanno il numeratore maggiore del denominatore, o uguale ad esso, si riducono in interi dividendo il numeratore pel denominatore. Come della frazione $\frac{12}{3}$ dividendo il numeratore 12 pel denominatore 3, si formano 4 interi. La frazione $\frac{abm}{a}$ si riduce all' intero bm, ec.

Che se, dopo fatta la divisione del numeratore pel denominatore, vi rimane qualche avanzo, allora il quoziente sarà un numero misto. Così la frazione $\frac{23}{4}$ ci dà $5\frac{3}{4}$, cioè cinque interi, e tre quarte parti d' un intero. Esempigrazia ventitrequarte parti della nostra lira d' argento formano cinque lire, e quindici soldi, i quali sono le tre quarte parti della lira.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

124. Ritrovare la massima comune misura di due numeri.

RISOLUZIONE. Si divida il numero maggiore pel minore, e fatta la divisione, se non vi rimane verun avanzo, allora il numero minore è la massima misura

ricercata (nn. 88. 89.). Come de' numeri 7, e 28 la maſſima comune miſura è il 7, perchè dividendo il 28 per 7 niun avanzo vi rimane. Inoltre dividendo gli ſteſſi numeri 7, e 28, pel 7, i quozienti 1, e 4 ſono numeri primi tra di loro.

Se poi, diviſo il maggiore pel minore, avanza qualche coſa, allora, nulla badando al quoziente ſi noti il reſiduo, e per eſſo ſi divida il numero minore; e trovando un altro avanzo, per eſſo ſi divida il primo reſiduo; poi pel terzo reſiduo dividaſi il ſecondo, ec. E così continuando, fintantochè ſi trovi un diviſore, il quale divida eſattamente in interi il precedente reſiduo, e queſt' ultimo diviſore ſarà la maſſima miſura comune ricercata.

Si cerchi per eſempio la maſſima comune miſura de' due numeri 203, e 667. Si divida 667 per 203, e niun conto facendo del quoziente 3, pel reſiduo 58 ſi divida il 203, e trovato il reſiduo 29, per eſſo ſi divida il primo avanzo 58, e fatta la diviſione, non rimanendovi verun reſiduo, ſi conchiuda che l' ultimo diviſore 29 è la maſſima comune miſura, che ſi cercava; imperciocchè dividendo i numeri 203, e 667 per 29, i quozienti 7, e 23 ſono numeri primi fra loro [nn. 86. 89.]. Il che ec.

```
            667 | 203
            609   3
       203 | 58
       174   3
  58 | 29
  58   2
   0
```

125. Se dopo fatta ogni diviſione l' ultimo reſiduo ſarà 1, queſto ſignificherà, che i due numeri dati ſono primi tra di loro, e che non hanno veruna miſura comune, eccettuatane l' unità.

Come cercando la maſſima comune miſura de' due numeri 17, e 58; divido 58 per 17, e niun conto facendo del quoziente 3, trovo il reſiduo 7, pel quale divido il 17, e fatta la diviſione, mi avanza 3, pel quale divido il 7, e trovo il reſiduo 1, il quale mi indica, che i due numeri 17, e 58 non hanno altra miſura comune, che l' unità, e per conſeguenza ſono numeri primi fra di loro [n. 86]. Il che ſi era propoſto di fare.

```
           58 | 17
           51   3
       17 | 7
       14   2
  7 | 3
  6   2
  1
```

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

126. Ridurre le frazioni alla minima denominazione.

RISOLUZIONE. Primieramente per l' antecedente problema troviſi la maſſima comune miſura del numeratore, e denominatore della frazione data. Poſcia per la ſteſſa miſura comune ſi dividano il numeratore, ed il denominatore di eſſa frazione, ed i quozienti formeranno la ricercata frazione di minima eſpreſſione, ed uguale alla data frazione. Così per ridurre la frazione $\frac{32}{48}$ alla minima denominazione, ſi trovi (n. 124.) la maſſima comune miſura de' numeri 32, e 48, la quale ſarà 16, indi ſi dividano i due numeri 32, e 48 pel 16, ed i quozienti 2, 3 formeranno la frazione $\frac{2}{3}$ eſpreſſa co' minimi termini [n.90.]

perchè i due numeri 2, e 3 ſono tra di loro primi (86.) Inoltre perchè il numeratore 32, ed il denominatore 48. ſono ſtati diviſi per lo ſteſſo numero 16, i quozienti 2, 3 coſtituiſcono la frazione $\frac{2}{3}$ [n. 101.] uguale alla frazione $\frac{32}{48}$.

Nella medeſima maniera le frazioni $\frac{5}{20}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{203}{667}$ ſi riducono alla minima denominazione $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{23}$, e così delle altre.

Similmente la frazione $\frac{am}{cm}$ ſi riduce alla minima eſpreſſione $\frac{a}{c}$.

Parimente la frazione $\frac{a^3}{a^5}$ ſi riduce alla minima denominazione $\frac{1}{a^2}$ dividendo il numeratore a^3, ed il denominatore a^5 per la ſteſſa quantità a^3. Ma dividendo a^3 pel diviſore a^5, da quanto ſi è dimoſtrato al numero 70, il quoziente è a^{3-5}, cioè a^{-2}; dunque a^{-2} ſignifica $\frac{1}{a^2}$.

Collo ſteſſo raziocinio ſi dimoſtra, che c^{-5} ſignifica $\frac{1}{c^5}$; a^{-4} ſignifica $\frac{1}{a^4}$, ec.

Dunque la frazione $\frac{am}{c^3}$ si potrà esprimere per amc^{-3}, perchè essa frazione è il prodotto di am moltiplicato per $\frac{1}{c^3}$.

Similmente la frazione $\frac{a^2b}{cx^2}$ si esprimerà per $a^2bc^{-1}x^{-2}$; e la stessa cosa s'intenda di ogni altra simile frazione.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

127. Ridurre le frazioni alla medesima denominazione.

RISOLUZIONE. 1. Quando sono soltanto due le frazioni da ridursi al medesimo nome, come $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{x}$ allora il numeratore a, ed il denominatore m della prima si moltiplichino amendue per x denominatore della seconda frazione; indi il numeratore c, ed il denominatore x della seconda, si moltiplichino tutti due per m denominatore della prima frazione, e si otterranno le frazioni $\frac{ax}{mx}$, e $\frac{cm}{mx}$ dello stesso denominatore mx, ed uguali alle date frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{x}$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè noi [n. 101.] abbiamo $\frac{ax}{mx}=\frac{a}{m}$, e $\frac{cm}{mx}=\frac{c}{x}$. Dunque, ec.

Nello ſteſſo modo le due frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{7}$ ſi riducono alle frazioni $\frac{14}{21}$, e $\frac{12}{21}$ del medeſimo denominatore 21, moltiplicando il 2, ed il 3 per 7, ed il 4, e 7 per 3.

2. Quando poi ſono più di due le frazioni da ridursi al medesimo nome, come $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{m}{x}$, allora ciaſcun numeratore si moltiplichi pel prodotto di tutti i denominatori delle altre frazioni, cioè a per rx, b per cx, ed m per cr, ed i prodotti arx, bcx, mcr ſaranno i numeratori delle frazioni ridotte, e per comune denominatore ſi metta il prodotto, crx, di tutti i denominatori delle frazioni date, e ſaranno le frazioni $\frac{arx}{crx}$, $\frac{bcx}{crx}$, $\frac{mcr}{crx}$ del medesimo nome crx, e uguali alle frazioni date.

DIMOSTRAZIONE. Perciocchè da quanto ſi è detto nel numero 101, egli è $\frac{arx}{crx} = \frac{a}{c}$, $\frac{bcx}{crx} = \frac{b}{r}$, ed $\frac{mcr}{crx} = \frac{m}{x}$. Il che ſi era propoſto di fare, e dimoſtrare.

Per la medeſima ragione date le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, moltiplicando il 2 per 5×7, cioè per 35; poſcia il 4 per 3×7, cioè per 21; indi il 6 per 3×5, cioè per 15, ſi avranno i numeratori 70, 84, 90, il denominatore de' quali ſarà il prodotto 3×5×7, cioè 105; onde

ſaranno le frazioni $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ dello ſteſſo denominatore 105, ed uguali alle date frazioni (n. 101).

128. COROLLARIO. Delle frazioni del medeſimo nôme quella è maggiore, la quale ha il numeratore maggiore, come chiaramente si vede; dunque, date due, o più frazioni di nome diverſo, per conoſcere quale di eſſe ſia la maggiore, ſi riducano allo ſteſſo nome, e quella, che avrà il maggior numeratore ſarà la maggiore; come, date le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, per ſapere quale di queſte ſia la maggiore, ſi riducano (n. 127) allo ſteſſo nome, e si avranno le frazioni ridotte $\frac{56}{84}$, $\frac{63}{84}$, $\frac{60}{84}$, delle quali, come occularmente ſi vede, la maggiore è $\frac{63}{84}$, la quale è uguale alla frazione $\frac{3}{4}$; perciò delle date frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, la maggiore di tutte è la frazione $\frac{3}{4}$.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

129. Sommare i rotti, o frazioni.

RISOLUZIONE. Se le frazioni date hanno il medeſimo denominatore, allora si ſommino tutti i numeratori inſieme (nn. 38. 50.); quindi alla ſomma de' numeratori si ſottoſcriva per denominatore il comune nome.

Così delle frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{-b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{z-x}{m}$, la ſomma ſarà $\frac{a-b+c+z-x}{m}$.

Parimente la ſomma de' rotti $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{11}$ ſarà $\frac{4+3+2}{11}$, cioè $\frac{9}{11}$.

Quando le frazioni non ſono dello ſteſſo nome, allora ſi riducano [127.] alla medeſima denominazione, e poi ſi ſommino, come ſi è detto antecedentemente.

Qualche volta però ſi fa la ſomma delle frazioni, ſenza ridurle allo ſteſſo nome, ſcrivendole l' una dopo l' altra coi loro ſegni +, e −.

Come de' rotti $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{-a}{x}$ la ſomma ſarà $\frac{a}{c}+\frac{b}{m}-\frac{a}{x}$; ovvero $\frac{amx+bcx-acm}{cmx}$, ſe ſi ridurranno a comune denominatore.

Se occorrerà di ſommare numeri miſti, cioè interi con frazioni, in tal caſo ſi riducano i rotti alla ſteſſa denominazione, ſe non l' hanno; poi ſi ſommino ſeparatamente gl' interi, e ſeparatamente i rotti, la ſomma de' quali ſe forma qualche intero [n. 123.] eſſo ſi aggiunga alla ſomma degl' interi.

Come de' numeri miſti $8\frac{2}{3}$, $12\frac{4}{5}$, e $9\frac{6}{7}$, cioè [riducendo i rotti allo ſteſſo nome] de' numeri

$8\frac{70}{105}$, $12\frac{84}{105}$, $9\frac{90}{105}$ la ſomma ſarà $29\frac{244}{105}$, o ſia $31\frac{34}{105}$, perchè la ſomma dei rotti $\frac{244}{105}$ (n. 123) contiene due interi col rotto $\frac{34}{105}$.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

130. Sottrarre le frazioni.

RISOLUZIONE. Quando le frazioni hanno lo ſteſſo nome, ſi ſottragga il numeratore della frazione ſottraenda dal numeratore della frazione minuenda, ed al reſiduo ſi ſottoſcriva il comune denominatore.

Come dalla frazione $\frac{18}{25}$ ſottraendo la frazione $\frac{14}{25}$ il reſiduo ſarà $\frac{18-14}{25}$, cioè $\frac{4}{25}$; poichè ſommando il reſiduo $\frac{4}{25}$ col rotto ſottratto $\frac{14}{25}$ ſi reſtituiſce il rotto minuendo $\frac{18}{25}$

Per la ſteſſa ragione ſottraendo la frazione $\frac{c}{m}$ dalla frazione $\frac{a}{m}$ il reſiduo ſarà $\frac{a-c}{m}$.

Parimente dalla frazione $\frac{a}{c+m}$ ſotraendo la frazione $\frac{b-x}{c+m}$, il reſiduo ſarà $\frac{a-b+x}{c+m}$.

Ma quando le frazioni date non hanno lo ſteſſo denominatore; allora [n. 127.] ſi riducano al medeſimo nome, e poi ſi operi come ſopra.

131. Se una frazione ſi dovrà ſottrarre da un intero, o pure un intero dovrà ſottrarſi da una frazione, allora riducaſi [119.] l' intero in frazione dello ſteſſo nome della frazione data; poſcia facciaſi la ſottrazione, come ſi è preſcritto nell' antecedente numero.

Così per ſottrarre dall' intero 8 la frazione $\frac{3}{5}$, riduco l' intero 8 in quinte parti, e [n. 119.] ſaranno $\frac{40}{5}$; indi ſottraggo $\frac{3}{5}$ da $\frac{40}{5}$, il reſiduo ſarà $\frac{37}{5}$, cioè $7\frac{2}{5}$, ſe (n. 123.) ſi riduce in interi.

Medeſimamente per ſottrarre dalla quantità a il rotto $\frac{c}{m}$, ſi riduca l' a in frazione [n. 119.] del nome m, ſarà $\frac{am}{m}$, e fatta la ſottrazione, l' avanzo ſarà $\frac{am-c}{m}$.

Similmente volendo ſottrarre la quantità b dalla frazione $\frac{a}{c}$, riduco il b in frazione del nome c [n. 119.], e ſarà $\frac{bc}{c}$; indi fatta la ſottrazione, il reſiduo ſarà $\frac{a-bc}{c}$.

132. La ſottrazione dei rotti di diverſo nome ſi fa ancora ſenza ridurli al medeſimo denominatore, can-

giando i segni al numeratore della quantità sottraenda, come si è insegnato nel problema ottavo del primo libro.

Come della frazione $\frac{a}{m}$ sottraendo la frazione $\frac{c-m}{x}$, il residuo sarà $\frac{a}{m}$ $\frac{-c+m}{x}$, e riducendo a comune denominatore, esso residuo sarebbe $\frac{ax-cm+mm}{mx}$.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

133. Moltiplicare le frazioni.

RISOLUZIONE. Si moltiplichino i numeratori tra di loro, e fra loro i denominatori, il primo prodotto sarà numeratore, ed il secondo sarà denominatore del prodotto ricercato.

Si debba moltiplicare $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, il prodotto sarà $\frac{5\times 3}{7\times 4}$, cioè $\frac{15}{28}$.

Nella stessa maniera moltiplicando il rotto $\frac{a}{c}$ per $\frac{b}{m}$ il prodotto sarà $\frac{ab}{cm}$.

DIMOSTRAZIONE. Perchè x (n. 21.) può significare qualsivoglia quantità; perciò supponiamo, che significhi la frazione $\frac{a}{c}$; sia cioè $\frac{a}{c}=x$. Medesimamente si faccia $\frac{b}{m}=z$, ed avremo due equazioni, la

prima delle quali si moltiplichi per c, e (per l'assioma 4, e proposizione 1.) si avrà altra equazione $a=cx$. Similmente l'equazione $\frac{b}{m}=z$ moltiplicata per m produrrà (nn. 107., 118.) un' altra equazione $b=mz$.

Poscia l'equazione $a=cx$ si moltiplichi per l'equazione $b=mz$, cioè a per b, e cx per mz, si avrà un' altra equazione $ab=cmxz$, la quale si divida per cm, e [per l' assioma 5.] sarà $\frac{ab}{cm}=\frac{cmxz}{cm}$, cioè [n. 68.] sarà $\frac{ab}{cm}=xz$. Ma, per la supposizione fatta, x significa la frazione $\frac{a}{c}$, e z significa la frazione $\frac{b}{m}$, in conseguenza [n. 58.] il prodotto xz esprime il prodotto della frazione $\frac{a}{c}$ nella frazione $\frac{b}{m}$; ma dalla dimostrazione fatta abbiamo $\frac{ab}{cm}=xz$, e le cose uguali (n. 27.) si possono sostituire l'una in vece dell' altra, dunque anche $\frac{ab}{cm}$ sarà il prodotto della frazione $\frac{a}{c}$ nella frazione $\frac{b}{m}$.

Dunque moltiplicando i numeratori fra loro, e tra di loro i denominatori si ottiene il prodotto delle frazioni; la qual cosa si dovea dimostrare.

134. Dovendo moltiplicare un intero per una frazione, ovvero una frazione per un intero, si molti-

plichi il numeratore della data frazione per l' intero dato, ed al prodotto ſi ſottoſcriva il denominatore della ſteſſa frazione.

Così moltiplicando la frazione $\frac{3}{7}$ per l' intero 2, cioè [n. 121.] per $\frac{2}{1}$ il prodotto ſarà $\frac{6}{7}$, per l' antecedente dimoſtrazione.

Similmente moltiplicando $\frac{a}{m}$ per c, o ſia per $\frac{c}{1}$, il prodotto ſarà $\frac{ac}{1m}$, cioè $\frac{ac}{m}$.

Quando un intero con frazione ſi ha da moltiplicare per un intero, allora ſi moltiplichi l' intero nell' intero, e nella frazione. Come moltiplicando $5\frac{3}{4}$ per 2, il prodotto ſarà $10\frac{6}{4}$, e riducendo la frazione in interi (n. 123.), eſſo prodotto ſarà $11\frac{2}{4}$, o ſia $11\frac{1}{2}$ (n. 126.).

135. Se un intero con frazione ſi dovrà moltiplicare per un rotto, in tal caſo ſi riduca (n. 119.) l' intero in frazione dello ſteſſo nome della frazione anneſſa, colla quale ſi ſommi, indi ſi faccia come ſopra ſi è dimoſtrato.

Così a moltiplicare il numero miſto $3\frac{5}{6}$ pel rotto $\frac{2}{7}$, riduco l' intero 3 in ſeſte parti [n. 119], ed avrò $\frac{18}{6}$, che uniſco alla frazione $\frac{5}{6}$, e moltiplico la ſomma $\frac{23}{6}$ per $\frac{2}{7}$ ed avró il prodotto $\frac{46}{42}$,

il quale [123.] contiene un intero col rotto $\frac{4}{42}$, o ſia $\frac{2}{21}$ (126.), dunque il prodotto ſarà $1\frac{2}{21}$.

Finalmente ſe un numero miſto ſi dovrà moltiplicare per un altro numero miſto allora ciaſcun intero (119.) ſi riduca in una frazione dello ſteſſo nome colla frazione, che gli ſta anneſſa, colla quale ſi ſommi, e nel rimanente ſi operi come ſopra.

Sia dà moltiplicarſi $4\frac{2}{3}$ per $6\frac{3}{5}$, riducaſi l' intero 4 in terze parti $\frac{12}{3}$, le quali ſi aggiungano al rotto $\frac{2}{3}$, e l' intero 6 in quinte parti $\frac{30}{5}$, le quali ſi ſommino col rotto anneſſo $\frac{3}{5}$; poi ſi moltiplichi $\frac{14}{3}$ per $\frac{33}{5}$, il prodotto ſarà $\frac{462}{15}$, il quale ridotto in interi, ed a minimi termini [nn. 123. 126.] ſarà $30\frac{4}{5}$.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

136. Dividere le frazioni.

RISOLUZIONE. Si ſcrivano come ſi è fatto de' numeri, e quantità intere; poi ſi moltiplichino in croce, cioè il numeratore del rotto dividendo nel denominatore del rotto diviſore, ed il prodotto ſi ſcriva per

numeratore del quoziente, indi il denominatore del rotto dividendo nel numeratore del divisore, ed il prodotto mettasi per denominatore del quoziente.

Così dividendo il rotto $\frac{a}{m}$ pel rotto $\frac{s}{c}$, il quoziente sarà $\frac{ac}{ms}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo il rotto dividendo $\frac{a}{m}=x$ (n. 21.), ed il divisore $\frac{s}{c}=z$. Quindi la prima equazione $\frac{a}{m}=x$ si molíplichi per m, e (ass. 4. e prop. 1.) si avrà l' equazione $a=mx$, la quale novamente si moltiplichi per c denominatore del divisore, ne nascerà [ass. 4.] nuova equazione $ac=cmx$.

Nella stessa maniera la seconda equazione $\frac{s}{c}=z$ si moltiplichi per c, e per m, o sia per cm, e (107; 118) si avrà altra equazione $ms=cmz$. Finalmente l' equazione $ac=cmx$ si divida per l' equazione $ms=cmz$, vale a dire ac per ms, e cmx per cmz; e [ass. 5.] sarà $\frac{ac}{ms}=\frac{cmx}{cmz}$, cioè (riducendo alla minima denominazione la seconda parte dell' equazione) si avrà $\frac{ac}{ms}=\frac{x}{z}$ (126.).

Ma $\frac{x}{z}$ è il quoziente, che nasce dividendo la quantità x [la quale significa la frazione dividenda $\frac{a}{m}$] per la

quantità z, la quale esprime il rotto divisore $\frac{s}{c}$; dunque ancora la frazione $\frac{ac}{ms}$ (dimostrata uguale ad $\frac{x}{z}$) esprimerà il quoziente, che nasce dividendo la frazione $\frac{a}{m}$ per la frazione $\frac{s}{c}$, la qual cosa si dovea dimostrare.

Sicchè dividendo il rotto $\frac{8}{19}$ pel rotto $\frac{3}{7}$ il quoziente sarà $\frac{8\times7}{19\times3}$, cioè $\frac{56}{57}$, e così degli altri.

Da questa operazione dimostrata, si vede, che basta capovoltare il rotto divisore, indi moltiplicarlo pel rotto dividendo, e si ottiene il quoziente, essendo che $\frac{7}{3}\times\frac{8}{19}$ produce il quoziente $\frac{56}{57}$.

Inoltre quando le date frazioni hanno il medesimo denominatore, allora più facilmente si trova il quoziente mettendo il numeratore del rotto dividendo per numeratore del quoziente, e per suo denominatore il numeratore del divisore, e si avrà il ricercato quoziente espresso in minori termini; per esempio volendo dividere il rotto $\frac{3}{8}$ pel rotto $\frac{5}{8}$, il quoziente sarà $\frac{3}{5}$;

Poichè facendo la divisione coll' antecedente regola generale, il quoziente sarebbe $\frac{24}{40}$, il quale ridotto a minimi termini [126.] si esprime per $\frac{3}{5}$.

137. Volendo dividere una frazione per un intero, o una quantità intera per una frazione, allora all' intero si sottoscriva l' unità per denominatore, acciocchè [121.] si faccia una quasi frazione; poscia si operi come sopra.

Così dividendo il rotto $\frac{a}{m}$ per l' intero c, o sia per $\frac{c}{1}$, si troverà il quoziente $\frac{1a}{cm}$, cioè $\frac{a}{cm}$.

Similmente il rotto $\frac{3}{4}$ diviso per l' intero 2, o $\frac{2}{1}$ dà il quoziente $\frac{3}{8}$.

Conseguentemente una frazione rimane divisa per un intero, se si moltiplica il suo denominatore per l' intero dato.

Dividendo un intero b, o sia $\frac{b}{1}$ [121.] per la frazione $\frac{m}{c}$, il quoziente sarà $\frac{bc}{1m}$, cioè $\frac{bc}{m}$.

Parimente se si divide il 6, o sia $\frac{6}{1}$ per rotto $\frac{2}{3}$, il quoziente sarà $\frac{18}{2}$, civè 9 (123.).

Per la qual cosa un intero si divide per una frazione moltiplicando l' intero pel denominatore della frazione, e sottoscrivendo al prodotto, per denominatore, il numeratore della frazione.

138. Dovendosi dividere un numero misto per una frazione, o per un altro numero misto, allora si riduca l' intero in una frazione dello stesso nome della frazione annessa all' intero, colla quale si sommi, e nel rimanente si faccia come sopra.

Sia da dividersi il numero misto $12\frac{3}{4}$ per la frazione $\frac{5}{6}$; si riduca il 12 in quarte parti (119), si formerà la frazione $\frac{48}{4}$, la quale si aggiunga al rotto $\frac{3}{4}$, la somma sarà $\frac{51}{4}$, la quale dividasi per $\frac{5}{6}$, il quoziente sarà $\frac{306}{20}$, cioè $15\frac{3}{10}$ [123., 126.].

Medesimamente dividendo $8\frac{3}{5}$ cioè $\frac{43}{5}$ per $7\frac{1}{2}$, cioè per $\frac{15}{2}$, il quoziente sarà $\frac{86}{75}$; vale a dire $1\frac{11}{75}$

139. ANNOTAZIONE. Se occorrerà di dover calcolare frazioni, di frazioni esse si ridurranno sempre ad una frazione semplice moltiplicandole insieme, cioè tutti i numeratori tra di loro, ed i denominatori anche fra loro, ed i prodotti formeranno un rotto semplice equivalente a tutti i dati rotti di rotti; per esempio il valore di

$\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{2}$ di $\frac{4}{5}$ sarà $\frac{3\times1\times4}{4\times2\times5}$, cioè $\frac{12}{40}$, che (126.) significa $\frac{3}{10}$; in fatti se parliamo della lira nostrale d'

argento, quattro quinti della lira sono soldi 16, la metà di soldi 16 sono soldi 8, e tre quarti di otto soldi, sono soldi 6; ma tre decimi di essa lira sono parimente soldi 6, dunque tre quarti di un mezzo di quattro quinti di lira fanno tre decimi della stessa lira, cioè soldi 6.

Similmente il rotto di rotti $\frac{1}{2}$ di $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ si riduce alla semplice frazione $\frac{24}{120}$, cioè $\frac{1}{5}$, per esempio $\frac{3}{4}$ di lira sono soldi 15, e $\frac{2}{3}$ di soldi 15 sono 10, e $\frac{4}{5}$ di soldi 10 sono soldi 8, ed $\frac{1}{2}$ di di soldi 8 sono soldi 4, i quali sono $\frac{1}{5}$ della lira; perciò la frazione $\frac{1}{5}$ equivale al suddetto rotto di rotti; e così degli altri.

Per la qual cosa le frazioni di frazioni quando saranno ridotte a frazioni semplici, si potranno calcolare, come le altre frazioni.

Nella moltiplicazione delle frazioni il prodotto è sempre minore delle frazioni, che si moltiplicano, perchè il moltiplicare una frazione per un' altra, egli è prendere una, o soltanto alcune parti della frazione moltiplicanda. Come il moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$ significa, che si debbono prendere due terze parti del rotto $\frac{3}{4}$, e però il prodotto $\frac{6}{12}$, o sia $\frac{1}{2}$ è minore del rotto moltiplicando $\frac{3}{4}$; per esempio tre quarti di lira sono soldi 15, e due terzi di soldi 15 sono soldi 10, metà della lira, minore de' tre quarti di essa.

Al contrario nella divisione dei rotti, il quoziente è maggiore della frazione dividenda, e qualche volta è un numero intero, perchè una frazione può contenerne un' altra due, o più volte. Esempigrazia dividendo il rotto $\frac{4}{5}$ pel rotto $\frac{1}{10}$ il quoziente (136.) è $\frac{40}{5}$, cioè 8, poichè $\frac{1}{10}\times 8$ produce $\frac{8}{10}$, cioè restituisce (126.) il rotto dividendo $\frac{4}{5}$. Se parliamo della lira d' argento, quattro quinti di essa sono soldi 16, ed un decimo di lira sono soldi 2; ora è chiaro, che soldi 2 sono contenuti otto volte nei soldi 16.

ELEMENTI

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE.

LIBRO TERZO.

DELLE POTESTÀ DELLE QUANTITÀ, E DELLA ESTRAZIONE DELLE RADICI.

DEFINIZIONE I.

140. *Poteſtà, o dignità, o potenza di una quantità* ſi chiama il prodotto, che naſce moltiplicando eſſa quantità per l' unità, o pe ſe ſteſſa una, o più volte.

DEFINIZIONE II.

141. *Prima poteſtà di qualunque quantità* è la ſteſſa quantità preſa una volta, o ſia moltiplicata per l' unità. Come $a\times 1$, cioè a è la prima poteſtà della quantità a. $1\times bm$, vale a dire bm, è la prima poteſtà della quantità bm.

Similmente 1×7, cioè 7 è la prima poteſtà del numero 7, e così degli altri.

DEFINIZIONE III.

142. *Quadratoo, o seconda potestà* di qualsivoglia quantità è il prodotto, che si foma moltiplicando una volta per se stessa la data quantità. Sicchè il numero 49 è il quadrato, o seconda potestà del numero 7, perchè nasce dalla moltiplicazione del 7 nel 7. Il 64 è quadrato dell' 8, perchè 8×8 fa 64.

Similmente moltiplicando a in a, il prodotto aa, o sia a^2 è il quadrato, o seconda potenza dell' a.

Parimente $9a^2b^4$ è il quadrato, o seconda potestà della quantità $3ab^2$, perchè $3ab^2 \times 3ab^2$ [65.] produce $9a^2b^4$.

Il quadrato della quantità am sarà $am \times am$, cioè a^2m^2.

Il quadrato, o seconda potestà di $-a$ sarà $-a \times -a$, vale a dire (55.) $+aa$, o sia a^2.

La seconda potestà, o quadrato della quantità $5a^3b^2m$ sarà $25a^6b^4m^2$.

Medesimamente moltiplicando $a+b$ per $a+b$, il prodotto $a^2+2ab+b^2$ sarà il quadrato di $a+b$; ed il quadrato di $a-b$ sarà $a^2-2ab+b^2$ prodotto di $a-b$ moltiplicato per $a-b$.

Moltiplicando $a+1$ per $a+1$, si otterrà il suo quadrato a^2+2a+1. Dunque se a significherà qualunque numero, verbigrazia 13, il suo quadrato a^2 sarà 169; se vorremo subito trovare il quadrato di $a+1$, cioè di 14, senza moltiplicare il 14 per 14 basterà al quadrato 169. aggiugnere $2a+1$, cioè $2 \times 13+1$, e la somma $169+26+1$, cioè 196 sarà il quadrato del 14.

(A) Il quadrato di $a-1$ sarà $\overline{a-1}\times\overline{a-1}$, cioè a^2-2a+1; che però se a signlficherà 20, il suo quadrato a^2 significherà 400; ed il quadrato di $a-1$, cioè del 19 sarà a^2-2a+1, cioè $400-2\times20+1$, vale a dire $401-40$, o sia 361.

Per la qual cosa se a qualunque numero quadrato si aggiugnerà il doppio della sua radice, e di più l'unità, la somma sarà il quadrato del numero, che supera dell' unità la medesima radice.

Ma se ad un numero quadrato si aggiugnerà l' unità, e quindi dalla somma si sottrarrà il doppio della radice di esso quadrato, il residuo sarà il quadrato della stessa radice diminuità dell' unità.

Il quadrato della frazione $\frac{a}{c}$ sarà $\frac{a}{c}\times\frac{a}{c}$, cioè $\frac{a^2}{c^2}$; ed il quadrato del rotto $\frac{3}{5}$ sarà $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$, cioè $\frac{9}{25}$.

Il quadrato di $\frac{1}{c^3}$ sara $\frac{1}{c^3}\times\frac{1}{c^3}$ vale a dire $\frac{1}{c^6}$. Medesimamente il quadrato di c^{-3} sarà c^{-6}; perchè [126.] c^{-3} significa $\frac{1}{c^3}$, e c^{-6} equivale ad $\frac{1}{c^6}$; ed inoltre perchè $c^{-3}\times c^{-3}$ produce c^{-6} (65.).

DEFINIZIONE IV.

143. *Cubo, o terza potestà di una quantità* si chiama il prodotto, che nasce moltiplicando la medesima quantità pel suo quadrato, cioè due volte per se stessa.

Così moltiplicando a per a, per a, o sia a^2 per a, il prodotto aaa, o a^3 è il cubo, o terza potestà della grandezza a.

Il numero 8 è cubo del 2, perchè si ottiene moltiplicando 2 in 2 in 2, o sia 4 in 2. Per la stessa ragione 27 è il cubo del 3, perchè $3\times3\times3$, o sia 9×3 produce il 27.

Il cubo di am sarà $a^2m^2\times am$, cioè a^3m^3; ed il cubo della quantità $5a^3b^2m$ è $25a^6b^4m^2\times5a^3b^2m$, vale a dire $125a^9b^6m^3$.

Il cubo di $-a$ sarà $-a^3$; perchè $-a\times-a$ dà il prodotto $+a^2$, e $+a^2\times-a$ dà $-a^3$.

Similmente moltiplicando il quadrato di $a+b$, che è $a^2+2ab+b^2$ per $a+b$, il prodotto $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ sarà il cubo, o terza potestà della quantità $a+b$; e così delle altre quantità.

(D) Il cubo di $a-1$ sarà $a^2-2a+1\times a-1$, cioè a^3-3a^2+3a-1, il quale ci manifesta, che se ad un numero cubo si aggiugne il triplo di sua radice, e da questa somma si sottrae la somma dell' unità col triplo quadrato di essa radice, il residuo sarà il cubo della medesima radice diminuita dell' unità.

Se per esempio al cubo di 5, che è 125 si aggiugne il 15 triplo della radice 5, e dalla somma 140 si sottrae la somma dell' unità col triplo quadrato di essa radice 5, cioè $3\times25+1$, vale a dire 76, il residuo $140-76$, che è 64, sarà il cubo di $5-1$, cioè del 4; la qual cosa è evidente.

Parimente il cubo di $\frac{a}{c}$ sarà $\frac{a^2}{c^2}\times\frac{a}{c}$, cioè $\frac{a^3}{c^3}$. per la stessa ragione il cubo di $\frac{1}{c}$ sarà $\frac{1}{c^3}$; e quello di di c^{-1} sarà c^{-3} ec.

144. *Quarta potestà, o quadrato-quadrato* di una quantità è il prodotto, che si fa moltiplicando la stessa quantità pel suo cubo. Così moltiplicando a^3 per a, il prodotto a^4 è la quarta potestà di a. Moltiplicando 27 per 3, il prodotto 81 è il quadrato-quadrato, o sia quarta potestà del 3 ec.

Se si moltiplica la quarta potestà di a, cioè a^4 per a, si avrà a^5 *quinta potestà* di a; e così proseguendo a^6, a^7, a^8 ec., sono le potestà sesta, settima, ottava ec. della medesima quantità a.

Per la qual cosa moltiplicando 2 in 2, si fa 4 quadrato del 2; il 2 in 4 dà 8 cubo di esso 2; il 2 nel 8 fa 16, quarta potestà del 2; il 2 nel 16 dà 32 quinta potestà del medesimo 2; il 2 nel 32 produce 64 sesta potenza di esso 2, e così continuando si trovano le altre potestà; e la stessa cosa s' intenda di ogni altra quantità.

(L) Inoltre gioverà osservare, che moltiplicando qualunque quadrato a^2 per un altro quadrato c^2, la

radice ac del prodotto a^2c^2 è ſempre uguale al prodotto delle due radici a, e c dei dati quadrati.

Così moltiplicando il 25 quadrato del 5 per 4 quadrato del 2, il prodotto 100 ha per radice quadrata il 10, che è il prodotto della radice 5 nella radice 2.

Medeſimamente a^3 cubo di a moltiplicato per m^3, cubo di m, dà il prodotto a^3m^3, il quale è il cubo di am prodotto della radice cubica a nella radice cubica m.

Laonde moltiplicando 27 cubo del 3 per 8, cubo del 2, il prodotto 216 è il cubo del 6, che è prodotto dalla radice 3 moltiplicata per la radice 2. La ſteſſa coſa ſi verifica delle altre poteſtà, come facilmente ſi può ſcorgere.

145. COROLLARIO I. Da quanto ſi è detto nelle antecedenti definizioni, ſi può facilmente comprendere, che per elevare a qualſivoglia poteſtà qualunque quantità litterale ſemplice, e poſitiva, baſta moltiplicare gli eſponenti di eſſa quantità pel numero della poteſtà ricercata.

Così per elevare alla ſeconda poteſtà la quantità $ab^2c^3m^6$ ſi moltiplichino gli eſponenti 1, 2, 3, 6 pel numero 2, e ſarà $a^2b^4c^6m^{12}$ la ſeconda poteſtà, o ſia il quadrato di $ab^2c^3m^6$, imperciocchè [142] moltiplicando $ab^2c^3m^6$ per $ab^2c^3m^6$ ſi ottiene lo lo ſteſſo quadrato $a^2b^4c^6m^{12}$.

La terza poteſtà di ab^4c^2 ſi ottiene triplicando gli eſponenti 1, 4, 2, e ſarà $a^3b^{12}c^6$ ilcubo, o terza poteſtà di ab^4c^2.

La quarta potestà si ottiene moltiplicando gli esponenti per 4; la quinta moltiplicandoli per 5, e così successivamente.

Ma se la data quantità sarà negativa, allora le potestà pari di essa quantità, cioè la seconda potestà, la quarta, la sesta ec. saranno positive; e le potestà dispari, cioè la terza, la quinta, la settima, ec. saranno negative, come evidentemente ne segue dalla moltiplicazione de' segni [55., 56.]. Così la serie delle potestà di $-a$ sarà $-a$, a^2, $-a^3$, a^4, $-a^5$, a^6, $-a^7$ ec.

Se le quantità hanno numeri coefficienti, di essi si trovino le potestà, come si è detto negli antecedenti numeri, moltiplicandoli in se stessi. Così la terza potestà della quantità $4a^2b^7$ sarà $4 \times 4 \times 4a^6b^{21}$, cioè $64a^6b^{21}$ [143.].

146. COROLLARIO II. Dunque non si può dare verun quadrato negativo; perchè o si moltiplica una quantità positiva per se stessa, o una quantità negativa per se medesima, ed il prodotto sempre (55.) sarà positivo. Lo stesso raziocinio si applichi a tutte le potestà pari, le quali sempre saranno positive.

147. ANNOTAZIONE. Qualsivoglia potestà delle quantità composte, alcune volte si esprime tirandovi sopra una linea retta, o chiudendole entro una parentesi, e scrivendole alla destra l' esponente della potestà ricercata.

Così $\overline{a+c}^2$, o pure $(a+c)^2$ significa il quadrato, o seconda potestà di $a+c$, cioè $a^2+2ac+c^2$.

Similmente $\overline{a+c}^3$, o pure $(a+c)^3$ indica il cubo, o terza potestà di $a+c$, vale a dire significa $a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$.

DEFINIZIONE V.

148. La prima poteſtà [141.] di qualſivoglia quantità, cioè quella grandezza, di cui ſi cercano, o ſono date le poteſtà, chiamaſi *lato*, *o radice* delle medeſime poteſtà. Così a è radice quadrata, o radice ſeconda di a^2; è radice terza, o cubica di a^3; radice quarta di a^4; e così diſcorrendo.

Similmente il numero 3 è radice quadrata del 9; radice cubica, o terza del 27; radice quarta del numero 81; radice quinta del 243. ec.

DEFINIZIONE VI.

149. *Eſtrazione della radice* ſi chiama quella operazione, che ſi fa per ritrovare il lato, o ſia radice di una data poteſtà, e da alcuni viene chiamata quinta operazione dell' Aritmetica.

Come eſtrarre la radice quadrata dal numero 144 è ritrovare il numero 12, il cui quadrato è il 144 [142.].

Eſtrarre la radice cubica dalla quantità a^6 è trovare la quantità a^2, il cubo della quale è a^6 [143.].

DEFINIZIONE VII.

150. Moltiplicando tra di loro due quantità diſuguali, il prodotto, che naſce, ſi chiama ancora *rettangolo* delle medeſime quantità, le quali ſi nomano *lati dello ſteſſo rettangolo*. Così il prodotto am diceſi rettangolo contenuto dalle quantità a, ed m, le quali chiamanſi lati del medeſimo rettangolo am.

DEFINIZIONE VIII.

151. *Quantità commensurabili* diconsi quelle, che hannno qualche parte aliquota, o misura comune [81., 82.]; o pure sono quelle, una delle quali è parte aliquota dell' altra.

Tutti i numeri volgari tanto interi, quanto rotti, o misti sono tutti commensurabili tra di loro, perchè hanno per misura comune o l' unità, o qualche parte dell' unità medesima, e per questa ragione si chiamano *numeri razionali*.

Così l' intero 2, e la frazione $\frac{3}{4}$ hanno per comune misura il rotto $\frac{1}{4}$, il quale è contenuto tre volte nel rotto $\frac{3}{4}$, e otto volte nell' intero 2; poichè l' intero 2 si esprime colla frazione $\frac{8}{4}$ (119.).

Medesimamente l' intero 4, ed il numero misto $5\frac{2}{3}$ hanno per misura comune il rotto $\frac{1}{3}$, il quale dodici volte è contenuto nell' intero 4 (119.), e diciassette volte nel numero misto $5\frac{2}{3}$, il quale si esprime con $\frac{17}{3}$.

Similmente le due frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$, le quali ridotte alla medesima denominazione si esprimono per $\frac{10}{15}$, e $\frac{12}{15}$, hanno per misura comune $\frac{1}{15}$.

Conſeguentemente tutti i numeri razionali ſono commenſurabili coll' unità, perchè o ſono miſurati dall' unità medeſima, o da qualche parte aliquota dell' unità.

Incommenſurabili poi ſi nomano quelle *quantità*, le quali non poſſono avere veruna miſura comune; ovvero ſono quelle, che non hanno veruna unità, alla quale ſiano commenſurabili; perciocchè ogni miſura è una, e ſi può prendere per l' unità [2.].

152. COROLLARIO. Per la qual coſa le quantità commenſurabili avranno tra di loro il rapporto, che ha l' unità ad un numero razionale intero; o pure un numero razionale intero ad un altro numero razionale intero. Imperciocchè o una di eſſe è parte aliquota dell' altra, ed allora, prendendo la minore per unità, alla quantità maggiore corriſponderà un numero intero razionale; e peró ſtarà la minore alla maggiore, come l' unità ad un numero intero razionale. Così, per eſempio, $3a$ ſta al $12a$ come 1 al 4 prendendo $3a$ per unità. Ovvero le date quantità hanno una parte aliquota, o miſura comune; ed allora prendendo eſſa miſura comune per unità, all' una, ed all' altra quantità corriſponderà un numero intero razionale; conſeguentemente ſtaranno tra di loro come un numero razionale intero ad un altro numero intero razionale. Eſempigrazia $6a$ ſta al $15a$ come il 2 al 5; poichè prendendo per unità la comune miſura $3a$, alla quantità $6a$ corriſponderà il numero 2, ed alla quantità $15a$ corriſponderà il numero 5; perciò $6a$ ſta al $15a$ come il 2 al 5.

Inoltre eſſendochè ogni numero razionale è commenſurabile coll' unità; e le grandezze incommenſurabili non avendo veruna unità, alla quale ſieno commenſurabili; però quelle quantità, le quali non ſono tra di loro come l' unità ad un numero razionale, o

come un numero razionale ad un altro numero razionale, saranno quantità incommensurabili.

DEFINIZIONE IX.

153. Il segno, di cui ci serviamo per indicare le radici delle potestà, è questo $\sqrt{}$, il quale si chiama *segno radicale*.

Quando dalla quantità posta sotto al segno radicale non si può estrarre la radice ricercata, allora quella quantità sia numerica, sia litterale, dicesi *quantità irrazionale*, o *sorda*, o *potestà imperfetta*, o *quantità radicale*.

Nella cima, o apertura superiore del segno radicale si mette il numero della radice ricercata, e quel numero si noma *indice*, o *esponente di quella potestà*, di cui ne indica la radice.

Ma quando si tratta di radice quadrata, o sia di radice seconda, non si mette il numero 2 nella cima del segno, e vi s' intende.

Come $\sqrt{64}$, significa 8, cioè la radice quadrata, o sia seconda del numero 64.

Parimente $\sqrt{3}$ indica la radice seconda del numero 3, la qual radice non si può esprimere da verun numero razionale; perchè non si puó trovare un numero razionale, il quale moltiplicato per se stesso dia il prodotto 3. Conseguentemente $\sqrt{3}$ è un numero incommensurabile all' unità.

Ma $\sqrt[3]{64}$ significa 4 radice cubica di 64. similmente $\sqrt[3]{a^3}$ significa a, cioè la radice cubica di a^3.

I numeri, che ſono incommenſurabili all' unità ſi dicono *irrazionali*, o *ſordi*; e quelli, che ſi riferiſcono alla ſeconda poteſtà ſi chiamano *numeri irrazionali del primo ordine*, quali ſono $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ec.

Quelli poi, che ſi riferiſcono alla terza poteſtà diconſi numeri razionali del ſecondo ordine, come ſono $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ec.

PROBLEMA I.

154. Estrarre la radice quadrata da' numeri.

RISOLUZIONE. Quando il numero dato è quadrato, e non è maggiore del numero 100, allora la radice quadrata di eſſo ſi trova nella ſeguente tabella, nella cui prima, e ſuperiore colonna vi ſono le radici, e nell' altra inferiore i riſpettivi quadrati di eſſe radici.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Da queſta tabella ſi vede chiaramente, che la radice quadrata di 25 è il 5; quella di 81 è il 9, ec.

155. Ma ſe il dato numero minore del 100 non è quadrato, allora ſi prenda la radice quadrata del maggior numero quadrato contenuto nel numero dato, e queſta diceſi *radice proſſima minore del dato numero*. Come la radice quadrata del numero 28 nón ſi puó trovare, perchè non vi è numero razionale, che moltiplicato per ſe ſteſſo poſſa produrre il numero 28; perció ſi prenda la ſua radice proſſima minore, la

quale è il 5, perchè il 25 ſuo quadrato è il maſſimo quadrato di numeri interi, che ſia contenuto nel numero 28.

Similmente la radice quadrata proſſima minore del 96 è il 9, perchè il ſuo quadrato 81 è il maſſimo de' quadrati interi contenuti nel dato numero 96.

156. Quando il dato numero è maggiore di cento, allora la radice quadrata di eſſo ſi eſtragga nella ſeguente maniera.

1. Dividaſi il dato numero in membri, ſeparando con un punto le figure di eſſo due a due, incominciando dalla parte deſtra, e proſeguendo verſo la ſiniſtra, e ſe il numero delle figure ſarà pari, ciaſcun membro conterrà due figure; ma ſe il numero delle figure ſarà diſpari, il primo membro alla ſiniſtra avrà ſoltanto una figura. Inoltre quanti ſaranno i membri, altrettante figure avrà la radice.

Premeſſe queſte coſe ſi operi come nel ſeguente eſempio.

Sia dato il numero A, cioè 294849, dal quale ſi debba eſtrarre la radice quadrata.

Dividaſi in membri, come ſi è detto, indi ſi cerchi nell' antecedente tabella la radice quadrata del primo membro 29 poſto alla ſiniſtra, e perchè non è numero quadrato, ſi prenda [155.] la radice proſſima minore, la quale è 5, e ſi metta alla deſtra in B, interpoſtavi una

A	B
29.48.49	543
25	C
44	10
2916	D
324	108
294849	
0	

riga dall' alto al baſſo tra i numeri A, e B. Quindi in ſe ſteſſa ſi moltiplichi la radice 5, ed il ſuo quadrato 25 ſi ſottragga dal membro 29, e alla deſtra del

residuo 4 si discenda la prima figura 4 del secondo membro 48, si formerà il numero 44. Poscia si raddoppi la radice trovata 5, e si farà il divisore 10, che scrivasi in C, e dividasi 44 pel 10, il quoziente sarà 4, il quale mettasi in B per seconda figura della radice, cioè alla destra del 5, e si avrà il 54, che moltiplichisi per se stesso, e si otterrà il suo quadrato 2916, il quale scrivasi sotto del 44, ma ordinatamente sotto le figure 2948, che formano i due primi membri a sinistra del numero A; e sottraggasi il 2916 dal 2948, il residuo sarà 32, alla cui destra si discenda la prima figura 4 del terzo membro 49, e si avrà altro membro dividendo 324. Indi si duplichi la già trovata radice 54, ed il suo doppio 108 si ponga in D, e per esso 108 si divida il 324, si troverà il quoziente 3, che si scriva in B per terza, ed ultima figura della radice. Finalmente si faccia il quadrato di tutta la radice trovata 543, il quale sarà 294849, e sottraggasi dai tre membri, cioè dall' intero numero A, e l' avanzo sarà 0; segno evidente, che il numero A è quadrato perfetto, e che la sua radice è 543, perchè il quadrato di essa restituisce il numero A.

157. Se nel progresso dell' operazione accadrà, che il quadrato della già ritrovata radice sia maggiore del numero, dal quale si dee sottrarre; allora si diminuisca dell' unità l' ultima figura della radice, che si è ritrovata colla divisione, come chiaramente si vedrà nel seguente esempio.

Si cerca la radice quadrata del numero E, che è 324. Si divida in membri, come ſi è detto poc' anzi, ed il primo membro a ſiniſtra ſarà 3, la cui radice quadrata proſſima minore è 1, la quale ſi metta in F, ed il ſuo quadrato 1 ſi ſottragga dallo ſteſſo membro 3, e ſi troverà il reſiduo 2, alla cui deſtra ſi diſcenda la prima figura 2 del ſecondo membro 24, e ſi formerà il numero 22, che ſi divida pel doppio della radice già trovata 1, cioè pel diviſore 2, poſto in G; ma il 2 in 22 è contenuto nove volte [nulla importa, che ſia contenuto più volte, perchè non mai ſi mette più di nove nel quoziente, o radice, in ciaſcuna particolare diviſione], onde ſi dovrebbe ſcrivere 9 per ſeconda figura della radice in F; quindi il quadrato 361 della radice 19 ſi dovrebbe ſottrarre dal 324, il che non ſi puó fare, perciò ſi diminuiſca di 1 il quoziente 9, cioè ſi dica, che il 2 nel 22 in queſto caſo non può eſſere contenuto nove volte, ma ſoltanto otto volte, e ſi metta 8 in F per ſeconda figura della radice, indi, moltiplicando in ſe ſteſſa la radice trovata 18, ſi ha il ſuo quadrato 324, che ſottratto dal numero E niuno avanzo laſcia, e però il numero 18 è radice quadrata del 324.

E	F
3.24	18
1	G
22	2
324	
0	

Quando ſi voglia più ſpeditamente trovare il quadrato della radice diminuita dell' unità, in tal caſo ſi faccia quanto ſi è dimoſtrato al numero 142 nel paragrafo A; come in queſto caſo avendo trovato, che il 361, quadrato del 19, è maggiore del biſogno, e che per conſeguenza la radice 19 ſi dee diminuire dell' unità, e porre per radice il 18, a ritrovare con

preſtezza il ſuo quadrato, ſi aggiunga 1 al quadrato 361, e dalla ſomma 362 ſi ſottragga il 38 doppio della radice 19, ed il reſiduo 362 — 38, cioè 324 ſarà il quadrato del 18, come chiaramente ſi vede.

158. Inoltre può accadere, che nell' eſtrarre la radice da un numero ſi trovi un diviſore maggiore del membro dividendo; ed in tal caſo ſi metta la cifra 0 nella radice, ed un' altra cifra 0 alla deſtra del diviſore, ed accanto al membro dividendo, ed alla ſua deſtra ſi diſcendano le due ſuſſeguenti figure del dato numero, come nel ſeguente eſempio ſi vede.

Sia da eſtrarſi la radice quadrata dal numero 43264, il quale ſi chiami A. Si divida coi punti in membri, come s' è detto al numero 156, e ſarà 4 il primo membro a ſiniſtra, la cui radice 2 ſi ſcriva in M, ed il quadrato 4 di eſſa ſi ſottragga dal membro 4 del numero A, l' avanzo ſarà 0,

A	M
4.32.64	208
4	G
0326	40
43264	
0	

alla cui deſtra ſi diſcenda il 3 prima figura del ſecondo membro 32, e ſi avrà 03, cioè 3 per membro dividendo. Si raddoppi la radice 2, ed il ſuo doppio 4 ſi metta in G per diviſore, e dividaſi 3 per 4; ma perchè il 4 non è contenuto nel 3, ſi ſcriva 0 in M dopo la figura 2, e ſimilmente ſi ponga un altro 0 in G dopo il 4, e ſi avrà la radice 20 in M, ed il ſuo doppio 40 in G ſarà diviſore, e per avere altro membro dividendo, alla deſtra del 03 ſi diſcendano le due ſeguenti figure 26 del numero A, cioè la ſeconda 2 del membro 32, e la prima 6 del terzo membro 64, e ſi formerà il membro dividendo 326, nel quale il diviſore 40 poſto in G è contenuto otto volte, e peró ſi ſcriva l' 8 in M per terza figura della

radice. Poscia facciasi il quadrato della radice trovata 208, che sarà 43264, e sottrattolo dal numero A, non rimanendovi veruno avanzo, sarà indizio certo, che il 208 è la radice quadrata del numero A.

159. Quando dopo l' ultima sottrazione vi rimane qualche residuo, è segno, che il dato numero non è quadrato, e che non puó avere una radice, che si possa esprimere da verun numero razionale; e la radice trovata nell' operazione è la radice prossima minore del dato numero, cioè la radice del massimo quadrato contenuto in esso numero.

Inoltre la radice di esso numero si può esprimere scrivendolo sotto al segno radicale [153.].

Benchè la vera radice non si possa trovare, quando il numero dato non è perfetto quadrato, ciò non ostante possiamo trovare una radice, la quale tanto si avvicini alla vera, che la differenza sia minima, e quasi per nulla si possa considerare, e ció si ottiene colla seguente regola.

REGOLA

DI APPROSSIMAZIONE

Per estrarre la radice quadrata da' numeri non quadrati.

160. Si aggiungano al dato numero non quadrato alcune coppie, o diciamo paia di zeri, cioè due zeri, o quattro, o sei ec. Poscia dal numero formato dal dato, e dalle cifre aggiunte si estragga la radice quadrata nella stessa maniera, che si è estratta negli antecedenti esempi. Quindi dalla ritrovata radice si separino alla destra tante figure, quante paia di zeri si sono aggiunte al numero dato; le rimanenti figure alla

ſiniſtra eſprimeranno la radice proſſima minore di eſſo numero dato (155) ; e le figure ſeparate alla deſtra ſi ſcrivano ſopra una lineetta per numeratore di una frazione, e per denominatore si metta l' unità con altrettante cifre o, quante furono le paia di zeri aggiunti al numero dato; e si avrà una radice compoſta d' un intero, e d' una frazione, che ſarà proſſimiore alla vera radice; e quanto maggior numero di coppie di zeri si ſarà aggiunto, tanto più vicina alla vera ſarà la ritrovata radice. Eccone un eſempio.

Si debba eſtrarre la radice quadrata dal numero 15, la cui radice proſſima minore [155.] è il 3 col residuo 6; per ritrovare una radice, che ſia più proſſima alla vera radice di eſſo 15, si aggiungano al medeſimo 15 tante paia di zeri, quante si vuole, per eſempio due paia e si formerà il numero 150000, dal quale si eſtragga la radice quadrata, come si è fatto negli antecedenti eſempi, e si troverà 387 radice proſſima minore del 150000 coll' avanzo 231; ora perchè ſi ſono aggiunte due coppie di zeri al numero dato 15, si ſeparino dalla radice trovata 3.87 due figure alla deſtra, cioè 87, e ad eſſo numero 87 si ſcriva per denominatore l' 1 con due zeri, e ſarà $3\frac{87}{100}$ la radice proſſimiore del 15, minore certamente della vera radice, ma molto più proſſima del 3; imperciocchè queſta ra-

```
15,00,00        |3,87
                 ------
                 3 87/100
 9
 --
 60    |6
       ---
1444
----
  560          |76
               ---
149769
------
  231.
```

dice $3\frac{87}{100}$, non differiſce nemmeno di una centeſima parte dell'unità dalla vera radice.

Se più coppie di zeri si aggiungeranno, continuando l' operazione si troverà una radice maggiormente proſſima alla vera radice.

La ragione di queſta operazione facilmente si comprenderà facendo le ſeguenti rifleſſioni, cioè

1. Che l' aggiugnere due zeri al dato numero, è lo ſteſſo, che moltiplicarlo per 100, quadrato del 10; l' aggiugnervi quattro zeri è un moltiplicarlo per 10000, quadrato di 100., ec.

2. Che moltiplicando un quadrato per un altro quadrato [n. 144 paragr. L] la radice quadrata del prodotto contiene il prodotto delle radici de' quadrati, che si ſono moltiplicati.

3. Che il ſeparare da un numero dato, una figura a deſtra, e ſotto la figura ſeparata mettervi il 10 per denominatore, è un dividere eſſo numero per 10; il ſepararne due figure è dividerlo per 100, ec. Or in queſta regola di approſſimazione, aggiugnendo due zeri, ſi moltiplica il numero dato (che si ſuppone un quadrato imperfetto) per 100 (quadrato del 10); indi si eſtrae la radice quadrata, che (144 paragrafo L) ſarà il prodotto del 10 (radice quadrata di 100) nella radice dell' altro numero quadrato imperfetto; poſcia dalla radice trovata si taglia a deſtra una figura, cioè si divide per 10 eſſa radice; ed il quoziente ſarà neceſſariamente la radice del dato quadrato imperfetto, ma proſſimiore, perchè gli si aggiunge la frazione fatta dalla figura ſeparata, e dal diviſore 10. Lo ſteſſo raziocinio si faccia, quando si aggiungono due o più paia di zeri.

PROBLEMA II.

161. Da un numero dato estrarre la radice cubica, o sia terza.

RISOLUZIONE. Se il numero dato è perfetto cubo, e non è maggiore del numero 1000, la sua radice cubica ritrovasi nella seguente tabella, nella quale chiaramente si vede, che la radice cubica di 729 è il 9; quella di 216 è il 6, ec. Medesimamente si vede, che il cubo di 7 è il numero 343, il cubo di 4 è il 64, ec.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

162. Ma quando il numero dato è minore del numero 1000, e non è cubo, allora prendasi la radice prossima minore, cioè la radice del cubo maggiore contenuto in esso numero. Come la radice prossima minore del 124 è il 4, perchè il suo cubo 64. è il massimo cubo contenuto nel 124, e così degli altri.

163. Quando il numero dato è maggiore di 1000, allora si èstragga la radice cubica col seguente metodo.

Sia da trovarsi la radice cubica del numero 79507, il quale si chiami A. Si divida il dato numero in membri, incominciando dalla destra, in maniera che ciascun membro contenga tre figure, eccettuato il primo a sinistra, il quale può

```
    A          R
 79.507       |43
  64          ----
 ----          D
  155         |48
 79507        ----
 -----
    0
```

rimanere con una sola, o con due, come si vede nel dato numero A.

Quanti sono i membri, altrettante figure avrà la radice.

Si cerchi poscia nell' antecedente tabella la radice cubica del primo membro a sinistra, che nel dato numero A è 79, e non è cubo, perciò si prenda la radice prossima minore 4, perchè il 64 è il maggiore cubo contenuto nel 79; e si metta il 4 in R per prima figura della radice; ed il suo cubo 64 si sottragga dal 79, e alla destra del residuo 15 si discenda la prima figura 5 del secondo membro 507, e si avrà il 155 per membro dividendo. Quindi della radice già trovata 4 facciasi il quadrato 16, e per il triplo di esso, cioè per 3×16, vale a dire per 48, posto in D, si divida il 155, il quoziente 3 sarà la seconda figura della radice, però si metta in R dopo il 4. Poscia della radice 43 si faccia il cubo 79507 [143.] il quale si sottragga dal numero A, e perchè non vi rimane verun avanzo, siamo certi, che il 43 è la radice cubica del dato numero A.

164. Alcune volte accade, che il cubo della già trovata radice è maggiore del numero, da cui si dee sottrarre, ed allora si diminuisca di 1 l' ultima figura della radice, come nel seguente esempio si vedrà.

Dal numero A, che è 155720872 si debba estrarre la radice cubica.

A	R
155.720.872	538
125	
307	75
148877	
68438	8427
155720872	
0	

Primieramente si divida in membri, come si è detto nel antecedente numero. Il primo membro a sinistra sarà 155, la cui radice prossima minore (162.) è 5, la quale scrivasi a destra in R, ed il suo cubo 125, sottraggasi dal membro 155 e alla destra del residuo 30 si discenda la prima figura 7 del seguente membro 720, si formerà 307, il quale si divida per 25×3, cioè per 75 [triplo quadrato della già trovata radice 5], il quoziente sarà 4, che si dovrebbe porre in R per seconda figura della radice, e si avrebbe la radice 54, il cubo di cui è 157464, che non si puó sottrarre dai due primi membri del numero A, cioè dal numero 155720, e però si diminuisca dell' unità il quoziente 4, e mettasi 3 per seconda figura della radice dopo il 5, e si avrà la radice 53, della quale il cubo (143.), che è 148877 si sottragga dal suddetto numero 155720, ed alla destra del residuo 6843 si discenda la prima figura 8 del terzo membro 872, e si avrà il numero 68438, il quale diviso pel triplo quadrato della radice trovata 53, che è 8427, ci dà il quoziente 8, che scrivasi in R per terza figura della radice. Di poi facciasi il cubo della radice 538, che sarà 155720872, il quale sot-

tratto dal numero A non lascia verun residuo, perció il numero 538 è la radice cubica del numero dato A.

Se si vorrà più facilmente trovare il cubo della radice diminuita dell' unità, si faccia, come si è dimostrato nel numero 143, al paragrafo D. Così in questo caso avendo trovato, che il 157464, cubo del 54, è maggiore del numero, da cui si dovea sottrarre, e conseguentemente la radice 54 si dee sminuire dell' unità, e mettere per radice il 53; per ritrovare facilmente il cubo di esso 53, al numero 157464, cubo del 54, si aggiunga il numero 162, che è il triplo del 54, e dalla somma 157626 si sottragga il numero 8749, che è la somma dell' 1 col numero 8748, che è il triplo quadrato del 54, il residuo 148877 sarà il cubo del 53, come occularmente si vede.

165. Se nel corso dell' operazione si troverà qualche divisore, il quale non sia contenuto nel membro dividendo, in tal caso si metta una cifra 0 nella radice, e due zeri si aggiungano al divisore, indi alla destra del membro dividendo si discendano le tre susseguenti figure del numero dato. Come nello estrarre la radice cubica dal numero 8,998,912, perchè il 12, triplo quadrato della radice già trovata 2 non è contenuto nel membro dividendo 09, perciò si metta 0 per seconda figura della radice, ed al divisore 12 si

8,998,912	208
8	
09989	1200
8998912	
0	

aggiungano due zeri per avere il divisore 1200 triplo quadrato della radice 20, quindi alla destra del membro dividendo 9 si discendano le tre figure seguenti 989 del numero dato, e ne verrà formato altro membro dividendo 9989, il quale dividasi per 1200, e si

troverà il quoziente 8 per terza figura della radice, che che sarà 208, perchè moltiplicata due volte per se stessa [143] restituisce il dato cubo.

166. Quando il numero dato non è cubo perfetto, allora, dopo fatta l' ultima sottrazione, vi rimane qualche residuo; e la radice trovata nell' operazione è la sua radice prossima minore.

Quantunque peró la vera radice cubica di un numero, che non è cubo perfetto non mai si possa trovare, nè esprimere con numeri razionali; ció nulla ostante possiamo per regola di approssimazione trovare una radice, che tanto si approssimi alla vera, che la differenza sia menomissima, e ció si ottiene nel modo seguente.

Al dato numero si aggiungano alcuni ternari di zeri; indi dal numero dato colle aggiunte cifre si estragga la radice cubica, come si è fatto negli antecedenti esempi. Quindi dalla radice ritrovata si separino verso destra tante figure, quanti ternari di zeri sono stati aggiunti al numero dato, le rimanenti figure alla sinistra conterranno la radice prossima minore del dato numero, ed essa radice insieme ad una frazione, che abbia per numeratore le figure state separate alla destra, e per denominatore l' unità con tanti zeri, quanti ternari di essi sono stati aggiunti al numero dato, sarà una radice prossimiore alla vera, e tanto maggiormente si approssimerà alla vera radice, quanto maggiore sarà stato il numero de' ternari di zeri aggiunti al dato numero.

Così per esempio al numero 12, che non è cubo, e la sua radice prossima minore è 2, aggiugnendovi due

ternari di cifre si sorma il numero 12000000, la cui radice prossima minore, operando come negli antecedenti esempi, si troverà essere 228, dalla quale verso destra separando due figure, per cagione de' due ternari di zeri aggiunti, e ad esse figure sottoscrivendo l' unità con due zeri, si avrà la radice prossimiore $2\frac{28}{100}$, la qual non differisce dalla vera radice nemmeno di una centesima parte dell' unità. Se si aggiugneranno tre, o più ternari di zeri, si troverà una radice ancor prossimiore alla vera, benchè la vera radice, non mai si possa ritrovare.

12.000.000		2.28
		$2\frac{28}{100}$
8		
40	12	
10648		
13520		1452
11852352		
147648		

PROBLEMA III.

167. Estrarre la radice quadrata dalle quantità algebraiche.

RISOLUZIONE. La radice quadrata dalle quantità semplici si estrae dividendo pel numero 2 ciascuno esponente della data quantità. Così del quadrato a^2 la radice quadrata è a^1, o sia a, perchè $a \times a$ restituisce il quadrato a^2.

Parimente delle potestà a^4, b^8, c^6 le radici quadrate sono a^2, b^4, c^3. Medesimamente la radice

ſeconda, o ſia quadrata di a^7 ſarà $a^{\frac{7}{2}}$, perchè $a^{\frac{7}{2}} \times a^{\frac{7}{2}}$ produce $a^{\frac{14}{2}}$, cioè a^7.

La radice quadrata di b^5 ſarà $b^{\frac{5}{2}}$; la radice quadrata della quantità $a^3b^2c^4$ ſarà $a^{\frac{3}{2}}bc^2$ ec.

168. Se la data quantità avrà un numero coefficiente, allora si eſtragga in primo luogo la radice da eſſo numero, come la radice quadrata della grandezza $81a^2b^6$ è $9ab^3$ perchè $9ab^3 \times 9ab^3$ reſtituiſce il dato quadrato $81a^2b^6$. Similmente la radice quadrata di $324a^8b^4$, è $18a^4b^2$.

169. Il ſegno da premettersi alla radice quadrata di qualsisia quantità puó eſſere poſitivo, o negativo; imperciocchè il quadrato eſempigrazia a^2 [142.] tanto ſi ottiene moltiplicando $+a$ in $+a$, quanto col moltiplicare $-a$ in $-a$, e perció il quadrato a^2 ha due radici, una poſitiva $+a$, e l' altra negativa $-a$. La ſteſſa coſa si dee intendere di qualunque altro quadrato.

Per la qual coſa ogni quadrato [146] eſſendo poſitivo, la radice quadrata di una quantità negativa ſi chiama radice immaginaria. Così le quantità $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-c}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-2}$ ec. ſono radici immaginarie.

170. Se la quantità data ſarà compoſta, come ſarebbe $a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2$, per eſtrarne la radice ſeconda, ſi prenda

$$a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2 \quad \left| \begin{array}{l} a+b-c \\ \hline 2a \end{array} \right.$$

la radice quadrata di qualche termine, che ſia perfetto quadrato, come di a^2, ed eſſa radice a ſi ſcriva alla deſtra, come si è fatto nell' eſtrazione della radice quadrata dai numeri; indi pel doppio di eſſa radice a, cioè per $2a$ ſi divida ciaſcun termine della data quantità, che ſia diviſibile in interi, ſi dividano cioè i termini $+2ab$, e $-2ac$ per $2a$, ed i quozienti $+b$, $-c$ ſi uniſcano al termine già trovato a della radice, e ſarà $a+b-c$ la radice ricercata; poichè [142] facendo il quadrato di $a+b-c$, e ſottraendolo dalla data quantità, nulla rimane; conſeguentemente $a+b-c$ è la radice quadrata della data quantità.

171. La radice quadrata di qualſiſia quantità, come abbiamo detto al numero 153, ſi eſprime ponendola ſotto al ſegno radicale. Così $\sqrt{64}$ ſignifica 8. $\sqrt{a^2}$ ſignifica a. Parimente $\sqrt{15}$ indica la radice quadrata del 15. $\sqrt{ab-cm}$ ſignifica la radice quadrata della quantità $ab-cm$.

Inoltre ſcrivendo $\overline{ab-cm}^{\frac{1}{2}}$, ovvero $(ab-cm)^{\frac{1}{2}}$ ſi eſprime ancora la radice quadrata della quantità $ab-cm$; e lo ſteſſo ſi dee intendere di qualunque altra quantità.

172. COROLLARIO. Dalle cose sopradette ne viene in conseguenza, che per formare il quadrato di qualsivoglia quantità posta sotto al segno radicale, basta scriverla fuori del medesimo segno. Per esempio il quadrato di $\sqrt{25}$ è 25; poichè $\sqrt{25}$ significa 5, ed il quadrato di 5 è 25; dunque $\sqrt{25}\times\sqrt{25}$ dà il prodotto 25.

Similmente $\sqrt{15}\times\sqrt{15}$ produce 15.

Per la stessa ragione $\sqrt{a-c}\times\sqrt{a-c}$ dà il prodotto $a-c$.

Inoltre perchè la radice quadrata di a^3 non solo si esprime scrivendo $\sqrt{a^3}$, ma ancora [167] collo scrivere $a^{\frac{3}{2}}$; or moltiplicando $a^{\frac{3}{2}}$ per $a^{\frac{3}{2}}$, il prodotto [65] sarà $a^{\frac{6}{2}}$, cioè a^3. Dunque è chiaro, che $\sqrt{a^3}\times\sqrt{a^3}$ dà nel prodotto a^3. Lo stesso si dee intendere di ogni altra quantità sia semplice, sia composta, quando si trova sotto al segno della radice quadrata.

PROBLEMA IV.

173. Estrarre la radice cubica, o sia terza dalle quantità algebraiche.

RISOLUZIONE. Si estrae la radice cubica dalle quantità semplici col dividere pel numero 3 ciascuno esponente delle date quantità. Ma se hanno numeri coefficienti, si estrae prima da essi coefficienti, come si è insegnato nel problema secondo. Che però la radice

cubica di a^3 sarà $a^{\frac{3}{3}}$ cioè a^1, o sia a; perchè $a \times a \times a$ restituisce a^3.

Similmente delle quantità a^6, b^9, c^{12} le radici terze saranno a^2, b^3, c^4. Parimente della quantità b^2 la radice cubica sarà $b^{\frac{2}{3}}$, perchè $b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}$ (65) dà il prodotto $b^{\frac{6}{3}}$, cioè b^2. ec.

La radice cubica di $8a^6c^3$ sarà $2a^2c$. Medesimamente la radice terza di $125a^{12}c^3m^6$ sarà $5a^4cm^2$. ec.

174. Che se la data quantità sarà composta, come $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, allora pel numero antecedente si estragga la radice cubica da qualche termine, che sia perfetto cubo,

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \begin{array}{|l} a-b \\ \hline 3a^2 \\ \hline \end{array}$$

come da a^3, la cui radice a si scriva alla destra, e sarà il primo termine della radice. Poscia per $3a^2$, triplo quadrato della radice trovata a, si divida ciascun termine della data quantità, che sia divisibile senza avanzo, in questo esempio il solo termine $-3a^2b$ si divida per $3a^2$; ed il quoziente $-b$ si aggiunga nella

radice al primo termine a, e sarà $a-b$ la ricercata radice; imperciocchè facendo il cubo di $a-b$, che sarà $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, e sottraendolo dalla data quantità non rimarrà veruno avanzo; dunque $a-b$ è la radice cubica della data quantità.

175. Quando dalla data grandezza non si può colle antecedenti regole estrarre la radice cubica, o vi rimane qualche residuo dopo fatta la sottrazione, allora la data quantità si metta sotto al segno radicale col suo numero esponente 3 (153). Così $\sqrt[3]{a^4-bc}$ esprime la radice cubica della quantità a^4-bc.

Similmente $\sqrt[3]{8a^3}$ significa $2a$, che è la radice cubica di $8a^3$; e $\sqrt[3]{512}$ significa 8. ec.

Inoltre la radice cubica di a^4-bc si esprime eziandio scrivendo $\overline{a^4-bc}^{\frac{1}{3}}$, ovvero $(a^4-bc)^{\frac{1}{3}}$; e lo stesso s' intenda di ogni altra quantità.

176. COROLLARIO. Quindi si deduce, che il cubo di una quantità posta sotto al segno della radice terza si ottiene scrivendola fuori del segno. Per esempio il cubo di $\sqrt[3]{64}$ è 64, perchè $\sqrt[3]{64}$ [153.] significa 4, ed il cubo del 4 è 64; perciò il cubo di $\sqrt[3]{64}$ sarà 64.

Similmente il cubo di $\sqrt[3]{a^2c}$ è la quantità a^2c; imperocchè la radice cubica di a^2c [173] si esprime

eziandio per $a^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}$, e ſignifica lo ſteſſo, che $\sqrt[3]{a^2 c}$; ma il cubo di $a^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}$ è $a^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}$, cioè [65.] $a^{\frac{6}{3}} c^{\frac{3}{3}}$, cioè $a^2 c$. Dunque il cubo di $\sqrt[3]{a^2 c}$ ſarà $a^2 c$.

177. ANNOTAZIONE. Per ritrovare la radice quadrata, o cubica di una data frazione ſi eſtragga la ricercata radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore della data frazione.

Per la qual coſa la radice quadrata del rotto $\frac{25}{64}$ ſarà $\frac{5}{8}$. La radice quadrata della frazione $\frac{a^6}{c^2}$ ſarà $\frac{a^3}{c}$. La radice quadrata di $\frac{c}{m}$ ſarà $\sqrt{\frac{c}{m}}$ oppure ſi eſprimerà per $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}$, ovvero per $\frac{c^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$.

Medeſimamente la radice cubica del rotto $\frac{8}{27}$ ſarà $\frac{2}{3}$ La radice cubica della frazione $\frac{a^3}{c^6}$ ſarà $\frac{a}{c^2}$; e la radice cubica del rotto $\frac{c}{x}$ ſarà $\sqrt[3]{\frac{c}{x}}$, ovvero $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{x}}$ oppure $\frac{c^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; e così delle altre.

178. Inoltre la radice quadrata ſi eſtrae ancora da una frazione, moltiplicando il numeratore pel denominatore, e poſcia eſtraendo la radice quadrata dal prodotto, e ad eſſa radice mettendo per denominatore lo ſteſſo denominatore della frazione data. Così per ritrovare la radice quadrata di $\frac{3}{12}$ ſi moltiplichi il 3 nel 12, e dal prodotto 36 ſi eſtragga la radice quadrata 6, alla quale ſi ſottoſcriva per denominatore il 12, e ſarà $\frac{6}{12}$, cioè $\frac{1}{2}$ la radice quadrata del rotto $\frac{3}{12}$, il quale ſignifica $\frac{1}{4}$, la cui radice quadrata è $\frac{1}{2}$, come chiaramente ſi vede.

TEOREMA.

179. Le radici uguali hanno i quadrati uguali, i cubi uguali ec. Scambievolmente i quadrati uguali, i cubi uguali ec. hanno radici uguali.

1. DIMOSTRAZIONE. Sia $a=c$, cioè $a^1=c^1$, moltiplicando gli eſponenti uguali 1, ed 1 delle quantità uguali a, c per lo ſteſſo numero 2, o per 3, o per 4, ec. (aſſioma 4.) Sarà $a^2=c^2$, $a^3=c^3$, $a^4=c^4$, $a^5=c^5$ ec. Dunque le uguali poteſtà di radici uguali ſono anche tra di loro uguali.

2. Sia $a^2=m^2$, dividendo gli eſponenti uguali, 2, e 2 di potenze uguali pel medeſimo numero 2, i quozienti [aſſ. 5.] ſaranno uguali, cioè $a^1=m^1$, o ſia $a=m$.

Parimente se sarà $a^3=m^3$, dividendo per 3 gli esponenti si avrà $a=m$ ec.

Dunque gli uguali quadrati, i cubi uguali, ec. hanno ancora le radici uguali. Il che era ec.

AGGIUNTA

DELLE QUANTITÀ RADICALI.

180. Le quantità irrazionali, comunemente chiamate *radicali*, sono (come già abbiamo detto al numero 153.) quelle, dalle quali non si può estrarre la radice ricercata.

Le quantità radicali, che hanno lo stesso esponente, o indice (153.) si dicono *radicali dello stesso nome*, o *della stessa denominazione*, come $\sqrt[3]{acm}$, $\sqrt[3]{c^2-x}$, $\sqrt[3]{24}$, ec. Ma quando hanno diversi gli esponenti, si chiamano *radicali di diversa denominazione*, o *di diverso nome*, come $\sqrt{ac}$, $\sqrt[3]{a-m}$, $\sqrt[4]{24}$ ec.

RIDURRE UNA QUANTITÀ RAZIONALE IN UNA RADICALE D' UN DATO NOME.

181. Siccome ogni quantità intera si può esprimere [119.] con una frazione di qualsivoglia nome: così ancora ogni quantità razionale sia intera, o sia frazione si può esprimere da una quantità radicale di qualunque denominazione, e ciò si ottiene elevando la quantità razionale alla potestà indicata dall' esponente della radicale, e poscia mettendola sotto al segno. Così la

quantità razionale a ſi puó eſprimere per $\sqrt{a^2}$, per $\sqrt[3]{a^3}$, per $\sqrt[4]{a^4}$, ec.

Similmente il numero 2 ſi eſprime per $\sqrt{4}$, per $\sqrt[3]{8}$, per $\sqrt[4]{16}$, per $\sqrt[5]{32}$. ec.

Così ancora la frazione $\frac{2}{3}$ ſi eſprime per $\sqrt{\frac{4}{9}}$, per $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ per $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, ec.

Lo ſteſſo ſi dee intendere di qualunque altra quantità razionale ſia ſemplice, o compoſta, ſia numerica, o letterale.

TRASFORMARE UNA RADICALE IN UN' ALTRA DI DIVERSO NOME.

182. Se qualſivoglia quantità radicale s' innalzerà a qualunque poteſtà, ed il ſuo eſponente radicale ſi moltiplicherà pel numero dalla medeſima poteſtà, ſi formerà un' altra radicale quantità, che ſarà ſempre uguale alla data. Sia data la quantità $\sqrt[3]{a^5}$, elevando a^5, per eſempio, alla ſeconda poteſtà a^{10}, e moltiplicando l' eſponente radicale 3 pel numero 2 indice della ſeconda poteſtà, e ponendo il prodotto 6 per eſponente radicale, ſi avrà $\sqrt[6]{a^{10}}$ perfettamente uguale alla

$\sqrt[3]{a^5}$. Imperciocchè [167.] $\sqrt[6]{a^{10}}$ si esprime ancora per $a^{\frac{10}{6}}$, e $\sqrt[3]{a^5}$ per $a^{\frac{5}{3}}$; ma (101.) abbiamo $a^{\frac{10}{6}}=a^{\frac{5}{3}}$; dunque sarà eziandio $\sqrt[6]{a^{10}}=\sqrt[3]{a^5}$. Il che era ec.

Scambievolmente estraendo qualunque radice dalla quantità posta sotto al segno radicale, indi dividendo l' esponente radicale pel numemero indice della radice estratta, e mettendo il quoziente per esponente radicale, si avrà un' altra quantità radicale uguale alla data. Come data la quantità radicale $\sqrt[6]{c^{10}}$, estraendo la radice quadrata dalla quantità c^{10}, la quale (167.) sarà c^5; e dividendo l' esponente radicale 6 pel numero 2, indice della radice estratta, e mettendo il quoziente 3 per esponente radicale, si avrà la quantità radicale $\sqrt[3]{c^5}$ uguale alla data $\sqrt[6]{c^{10}}$, essendo $c^{\frac{5}{3}}=c^{\frac{10}{6}}$ (101.)

RIDURRE LE QUANTITÀ RADICALI AL MEDESIMO NOME.

183. Per la qual cosa le quantità radicali di diverso nome facilmente si ridurranno alla medesima denominazione, elevando la quantità, che sta sotto di un segno alla potestà espressa dall' esponente dell' altro segno radicale, e quindi mettendo per esponente comune il

prodotto de' due esponenti. Come date le quantità radicali $\sqrt{c}$, e $\sqrt[3]{a^5}$ di diverso nome [perchè la prima è radice seconda, e l' altra è radice terza] per ridurle a comune denominazione, s' innalzi il c alla terza potestà c^3, ed a^5 alla seconda potenza a^{10}, indi si moltiplichi l' esponente 2 nell' altro 3, il prodotto 6 sarà l' esponente comune, laonde si avranno le radicali quantità $\sqrt[6]{c^3}$, e $\sqrt[6]{a^{10}}$ del medesimo nome 6, ed uguali alle date radicali per l' antecedente numero; essendo $\sqrt[6]{c^3} = \sqrt{c}$, cioè $c^{\frac{3}{6}} = c^{\frac{1}{2}}$, e $\sqrt[6]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^5}$, cioè $a^{\frac{10}{6}} = a^{\frac{5}{3}}$.

COEFFICIENTI DELLE QUANTITA' RADICALI.

184. Ogni quantità prefissa al segno radicale dicesi *coefficiente della stessa quantità irrazionale*. Se per esempio saranno date le quantità $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{a}$, $\frac{2}{3}\sqrt{am}$; i numeri 3, 4, e $\frac{2}{3}$ saranno i coefficienti delle quantà irrazionali $\sqrt{5}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{am}$. Ma $\frac{2}{3}\sqrt{am}$ si puó anche esprimere per $\frac{2\sqrt{am}}{3}$, e non mai per $2\sqrt{\frac{am}{3}}$; poichè mettiamo, che a significhi 2, ed m 18,

in tal caso $\frac{2}{3}\sqrt{am}$ significherà $\frac{2}{3}\sqrt{2\times 18}$, cioè una quantità razionale $\frac{2}{3}\sqrt{36}$, vale a dire $\frac{2}{3}\times 6=\frac{12}{3}=4$; e $\frac{2\sqrt{am}}{3}$ significherà $\frac{2\sqrt{36}}{3}=\frac{2\times 6}{3}=\frac{12}{3}=4$; ma $2\sqrt{\frac{am}{3}}$ significherà $2\sqrt{\frac{36}{3}}$, cioè $2\sqrt{12}$, che è una quantità irrazionale.

Similmente avendo $a\sqrt[3]{x}$, $b\sqrt{ac}-m\sqrt{ac}$, o sia $\overline{b-m}\sqrt{ac}$, le quantità a, e $b-m$ sono coefficienti delle quantità irrazionali $\sqrt[3]{x}$, e $\sqrt{ac}$.

METTERE I COEFFICIENTI SOTTO AL SEGNO RADICALE.

185. Qualsivoglia coefficiente di una quantità irrazionale si può mettere sotto al segno radicale, elevandolo alla potestà indicata dall' esponente radicale, e poscia moltiplicandolo per la quantità radicale, ed il valore della quantità sarà il medesimo. Esempigrazia avendo $\frac{2}{3}\sqrt{am}$, fatto il quadrato del coefficiente $\frac{2}{3}$ che sarà $\frac{4}{9}$, e moltiplicandolo per am, avrò $\sqrt{\frac{4}{9}am}$, o $\frac{\sqrt{4am}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{am}$; poichè sia, come nel

numero antecedente, $a=2$, ed $m=18$, abbiamo trovato $\frac{2}{3}\sqrt{am}=4$, e $\sqrt{\frac{4am}{9}}$ ſignifica $\sqrt{\frac{4\times2\times18}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}$, cioè $\frac{12}{3}$, vale a dire lo ſteſſo 4.

Per la ſteſſa ragione $a\sqrt[3]{x}$ ſi può eſprimere per $\sqrt[3]{a^3x}$. Lo ſteſſo ſi dee intendere di ogni altro coefficiente radicale.

RIDURRE LE QUANTITA' RADICALI A MINIMA ESPRESSIONE.

186. Dalle coſe dette ſin ora evidentemente ne ſiegue, che una quantità radicale ſi puó ridurre *alla più ſemplice, o a minima eſpreſſione*, o ſia *a minimi termini*, quando è diviſibile per una poteſtà, che abbia per eſponente l'indice radicale; e ciò ſi ottiene dividendola per eſſa poteſtà; la cui radice ſi metterà per coefficiente della reſidua quantità irrazionale.

Così $\sqrt{9x}$ ſi riduce a minimi termini $3\sqrt{x}$; poichè per l'antecedente numero abbiamo $3\sqrt{x}=\sqrt{9x}$.

Similmente $\sqrt[3]{\frac{a^3m}{8}}$, o ſia $\frac{\sqrt[3]{a^3m}}{2}$, ovvero $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^3m}$ ſi riduce a minimi termini $\frac{a\sqrt[3]{m}}{2}$, o pure $\frac{a}{2}\sqrt[3]{m}$. La quantità $3\sqrt{a^2c-a^2x}$ ſi riduce a più ſemplice eſpreſſione $3a\sqrt{c-x}$.

Parimente $\sqrt[3]{32}$ ſi riduce a $2\sqrt[3]{4}$, perchè il 32 è il prodotto del 4 nel numero cubo 8.

RADICALI COMUNICANTI.

187. Le *quantità radicali* ridotte alla più ſemplice eſpreſſione diconſi *comunicanti*, *o tra di loro commenſurabili*, quando hanno la ſteſſa quantità ſotto al ſegno radicale dello ſteſſo nome. Come $2\sqrt{3}$, e $12\sqrt{3}$ ſono comunicanti, o ſia fra loro commenſurabili, perchè $2\sqrt{3}$ ſta al $12\sqrt{3}$, come 1 al 6. Similmente $a\sqrt[3]{c^2m}$, e $b\sqrt[3]{c^2m}$ ſono comunicanti ec.

ADDIZIONE, SOTTRAZIONE, E RIDUZIONE DELLE QUANTITA' RADICALI.

188. La ſomma, e ſottrazione, e riduzione a minor numero di termini delle quantità radicali ſi fanno come delle quantità razionali (50. 51. 52. ec.). Così la ſomma delle quantità irrazionali $\sqrt{a}$, $+3\sqrt{m}$, $a\sqrt[3]{x}$, $-\sqrt{m}$ ſarà $\sqrt{a}+3\sqrt{m}+a\sqrt[3]{x}-\sqrt{m}$, e riducendola a minor numero di termini ſarà $\sqrt{a}+2\sqrt{m}+a\sqrt[3]{x}$.

Dalla quantità $3\sqrt{a}-5\sqrt{2}+\sqrt[3]{m}$ ſottraendo la quantità $2\sqrt{a}+3\sqrt{2}-4\sqrt[3]{m}$, il reſiduo ſarà $3\sqrt{a}-5\sqrt{2}+\sqrt[3]{m}-2\sqrt{a}-3\sqrt{2}+4\sqrt[3]{m}$, cioè [51.]

riducendolo a minor numero di termini sarà

$\sqrt{a}-8\sqrt{2}+5\sqrt[3]{m}$; e così delle altre.

MOLTIPLICAZIONE DELLE QUANTITA' RADICALI PER LE QUANTITA' RAZIONALI.

189. La moltiplicazione di una quantità radicale per una quantità razionale si fa col mettere la quantità razionale per coefficiente della radicale. Così moltiplicando $\sqrt{m}$ per a, il prodotto sarà $a\sqrt{m}$. Moltiplicancando $\sqrt{5}$ per 4, il prodotto sarà $4\sqrt{5}$.

Similmente $\frac{c}{m}\times\sqrt{x}$ dà il prodotto $\frac{c}{m}\sqrt{x}$, o pure $\frac{c\sqrt{x}}{m}$. Medesimamente moltiplicando $\overline{a-\frac{c}{m}}$ per $\sqrt{x}$, il prodotto si esprimerà per $\overline{a-\frac{c}{m}}\times\sqrt{x}$, ovvero per $a\sqrt{x}-\frac{c}{m}\sqrt{x}$, o pure per $\overline{a-\frac{c}{m}}\sqrt{x}$, ovveramente per $(a-\frac{c}{m})\ \sqrt{x}$.

MOLTIPLICARE LE QUANTITA' RADICALI DEL MEDESIMO NOME.

190. La moltiplicazione delle quantità radicali del medesimo nome si ottiene moltiplicando fra loro i coefficienti, se ne hanno, indi le quantità, che sono sotto del segno radicale. Così moltiplicando $\sqrt{a}$ per $\sqrt{c}$, il prodotto sarà $\sqrt{ac}$. Moltiplicando $a\sqrt{c}$ per $b\sqrt{m}$, il pro-

dotto sarà $ab\sqrt{cm}$. Similmente $2\sqrt{12}\times5\sqrt{3}$ dà il prodotto $10\sqrt{36}$, cioè una quantità razionale $10\times6=60$, e questo accade, perchè il $2\sqrt{12}$ significa $2\sqrt{4\times3}$, e riducendola a più semplice espressione, si esprime per $4\sqrt{3}$ (186.), e moltiplicando $4\sqrt{3}$ per $5\sqrt{3}$ (172) si ottiene il prodotto $4\times5\times3$, cioè 60. Parimente moltiplicando $2\sqrt{ac}$ per $3\sqrt{a-m}$ si otterrà il prodotto

$$6\sqrt{a^2c-acm}.$$

MOLTIPLICARE LE QUANTITA' RADICALI DI DIVERSA DENOMINAZIONE.

191. Ma quando le quantità radicali sono di diversa denominazione, allora [183] si riducano al medesimo nome, e quindi si moltiplichino come sopra.

Per esempio, dovendo moltiplicare $5\sqrt{c}$ per $4\sqrt[3]{m}$, si riducano alla stessa denominazione (183.), e si avrà $5\sqrt[6]{c^3}$, e $4\sqrt[6]{m^2}$, che moltiplicate fra loro danno il prodotto $20\sqrt[6]{c^3m^2}$.

MOLTIPLICARE LE QUANTITA' RADICALI COMPOSTE.

192. Se le quantità radicali saranno composte di più termini, osservando le antecedenti regole, e quanto si è insegnato [60. 172. ec.] per le quantità razionali, facilmente si troverà il prodotto di esse. Così molti-

plicando $c\sqrt{a}-m\sqrt{x}$ per $b\sqrt{n}-s\sqrt{z}$, si avrà il prodotto $bc\sqrt{an}-bm\sqrt{nx}-cs\sqrt{az}+ms\sqrt{xz}$.

Similmente moltiplicando $a+\sqrt{c}$ per $x-\sqrt{z}$ il prodotto sarà $ax+x\sqrt{c}-a\sqrt{z}-\sqrt{cz}$.

Parimente moltiplicando $a-\sqrt{c}$ per $a-\sqrt{c}$, il prodotto ridotto a minori termini sarà $a^2-2a\sqrt{c}+c$, o sia $a^2+c-2a\sqrt{c}$, che è il quadrato di essa quantità $a-\sqrt{c}$.

Medesimamente moltiplicando $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (172.) il prodotto sarà $3-\sqrt{6}-\sqrt{6}+2$, cioè (51.) $5-2\sqrt{6}$, che è (142.) il quadrato della data quantità $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, la quale se si moltiplicherà pel suo quadrato $5-2\sqrt{6}$, si otterrà il cubo di essa, che sarà $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$.

MOLTIPLICARE UN BINOMIO RADICALE PEL SUO CONTRARIO.

193. Se si moltiplicherà un binomio radicale quadratico per se stesso, cangiando il segno ad uno de' termini del moltiplicatore, cioè + in −, o − in +, si otterrà per prodotto una quantità razionale. Così moltiplicando $a-\sqrt{c}$ per $a+\sqrt{c}$, il prodotto sarà $a^2-a\sqrt{c}+a\sqrt{c}-c$, cioè a^2-c. Similmente se si moltiplica $\sqrt{c}+\sqrt{m}$ per $\sqrt{c}-\sqrt{m}$, si otterrà il prodotto $c+\sqrt{cm}-\sqrt{cm}-m$, cioè (51.) $c-m$.

Parimente moltiplicando $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ per $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ il prodotto ſarà $6-\sqrt{12}+\sqrt{12}-2=6-2$, cioè 4, ec. e queſto chiamaſi *moltiplicare un binomio pel ſuo contrario*.

DIVIDERE LE QUANTITA' RADICALI DEL MEDESIMO NOME.

194. La diviſione delle quantità radicali, ſe hanno coefficienti, molte volte più facilmente ſi ottiene mettendoli [185.] ſotto al ſegno radicale; quindi, ſe ſono ſemplici, e della ſteſſa denominazione, ſi dividono le quantità poſte ſotto del ſegno radicale ſecondo le regole date per le quantità razionali (47. 67. 68. ec. 136. 137.), e quando ſono di diverſo nome, allora in primo luogo ſi riducano (183.) alla medeſima denominazione. Così dovendo dividere la quantità $a\sqrt{acm}$ per la quantità $\sqrt{a^2c}$, ſi metta primieramente il coefficiente a ſotto del ſegno (185.), e ſi avrà $\sqrt{a^3cm}$ da dividerſi per $\sqrt{a^2c}$, ed il quoziente (68. 70.) ſarà $\sqrt{am}$; poichè moltiplicando $\sqrt{am}$ per $\sqrt{a^2c}$, il prodotto [190.] ſarà $\sqrt{a^3cm}$, o ſia $a\sqrt{acm}$ riducendolo (186.) alla più ſemplice eſpreſſione, e reſtituiſce la quantità dividenda.

Quando i coefficienti ſi poſſono dividere tra di loro, allora non conviene metterli ſotto del ſegno radicale, perchè inutilmente ſi allungherebbe l' operazione. Come a dividere $12\sqrt{10}$ per $4\sqrt{2}$, dividendo il 12 per 4, ed il 10 per 2 ſi otterrà il quoziente $3\sqrt{5}$.

Similmente dividendo $am\sqrt{bcx}$ per $a\sqrt{cx}$, il quoziente sarà $m\sqrt{b}$.

Ma se il coefficiente, o la quantità radicale, non si può dividere in interi, allora il quoziente si esprima con frazione. Così dividendo $bc\sqrt{x}$ per $b\sqrt{m}$, il quoziente sarà $c\sqrt{\frac{x}{m}}$, o pure $\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{m}}$.

Parimente dividendo $3\sqrt{10}$ per $4\sqrt{2}$, il quoziente sarà $\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

DIVIDERE LE QUANTITA' RADICALI DI DENOMINAZIONE DIVERSA.

195. Quando le quantità radicali sono di nome diverso, per farne l'attuale divisione si debbono ridurre alla medesima denominazione [183.]; la qual cosa, se l'esponente di una radicale divide in interi l'esponente dell' altra radicale, più facilmente si ottiene, dividendo l'esponente maggiore pel minore, ed il quoziente indicherà la potestà, a cui si dee elevare la quantità, che è sotto al segno radicale dell' esponente minore, e ad essa potestà si dee porre il segno radicale del maggior esponente. Per esempio dovendosi dividere $\sqrt[6]{a^3b^2c^2m^3}$ per $\sqrt{am}$, a ridurle a comune denominazione, si divida il maggior esponente radicale 6 pel minore 2, ed il quoziente 3 indicherà, che la quantità radicale am si dee innalzare alla terza potestà a^3m^3, e che si dee mettere sotto al segno del nome 6, pro-

dotto del 2 nel 3, e sarà $\sqrt[6]{a^3m^3} = \sqrt{am}$ (182.); laonde si divida $\sqrt[6]{a^3b^2c^2m^3}$ per $\sqrt[6]{a^3m^3}$, ed il quoziente ricercato sarà $\sqrt[6]{b^2c^2}$, la quale (182. § L) si riduce a $\sqrt[3]{bc}$.

Similmente dividendo $\sqrt[4]{45}$ per $\sqrt{3}$, cioè per $\sqrt[4]{9}$, il quoziente sarà $\sqrt[4]{5}$.

Se il divisore sarà $\sqrt[4]{3}$ ed il dividendo sia $\sqrt{15}$, cioè $\sqrt[4]{225}$, si troverà il quoziente $\sqrt[4]{75}$.

DIVIDERE LE QUANTITA' RADICALI COMPOSTE.

196. Se una quantità composta di termini radicali si dovrà dividere per una radicale semplice, allora ciascun termine della quantità composta si divida per la radicale semplice, come si è insegnato negli antecedenti numeri; e se qualche termine non si puó attualmente dividere, si divida per frazione. Così dividendo $\sqrt{48}-\sqrt{30}+\sqrt{12}-\sqrt{5}$ per $\sqrt{6}$, il quoziente sarà $\sqrt{8}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{6}}$.

La divisione delle radicali composte qualche volta si può fare come la divisione delle quantità razionali composte [75. 76. ec.].

Se, verbigrazia, la quantità dividenda sarà $\sqrt{ac} - \sqrt{cm} + \sqrt{ab} - \sqrt{bm}$, ed il divisore sia $\sqrt{c} + \sqrt{b}$, si troverà il quoziente $\sqrt{a} - \sqrt{m}$, operando come si è insegnato per la divisione delle quantità composte razionali.

Similmente dividendo $\sqrt{30} - \sqrt{10} + \sqrt{18} - \sqrt{6}$ per $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, si avrà il quoziente $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Ma quando il divisore è un binomio, e non si puó nella maniera antecedente ritrovare il quoziente; allora si prenda il binomio contrario del divisore, cioè lo stesso divisore [183.] con un termine, che abbia il segno cangiato; e per esso binomio contrario si moltiplichino il divisore, ed il dividendo, indi facciasi la divisione.

Sia il radicale dividendo $\sqrt{24}$, ed il divisore $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, il quoziente si può esprimere per $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; ma volendo farne l' attuale divisione, si moltiplichino il numeratore $\sqrt{24}$, ed il divisore $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ pel suo contrario $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Moltiplicando $\sqrt{24}$ per $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, il prodotto sarà $\sqrt{72} + \sqrt{48}$, cioè (186.) sarà $6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$, e moltiplicando $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ per $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ si avrà il prodotto $3 - \sqrt{6} + \sqrt{6} - 2 = 1$; e dividendo $6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ per 1, il suo valore non si cangia, perció dividendo $\sqrt{24}$ per $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, il quoziente sarà $6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$; ed in fatti moltiplicandolo pel divisore $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, il prodotto $6\sqrt{6} + 12 - 12 - 4\sqrt{6}$, cioè

$2\sqrt{6}$, o sia $\sqrt{24}$, restituisce la quantità dividenda, come chiaramente si vede.

ESTRAZIONE DELLE RADICI DALLE QUANTITA' IRRAZIONALI SEMPLICI.

197. Dalle radicali semplici si può estrarre qualsivoglia radice moltiplicando l' esponente radicale per l' indice della radice ricercata. Per esempio la radice terza di $\sqrt{a}$, moltiplicando l' esponente 2 di $\sqrt{a}$ pel 3 indice della radice, che si cerca, sarà $\sqrt[6]{a}$ la radice terza di $\sqrt{a}$; imperciocchè $\sqrt{a}$ [167.] si esprime per $a^{\frac{1}{2}}$, e la radice terza di $a^{\frac{1}{2}}$ sarà $a^{\frac{1}{6}}$; perchè [173.] si debbono dividere gli esponenti per 3, e dividendo $\frac{1}{2}$ per 3 [137.], il quoziente è $\frac{1}{6}$; ma $a^{\frac{1}{6}}$ significa $\sqrt[6]{a}$; dunque. ec. Similmente $\sqrt[4]{\sqrt{m}}$, cioè radice quarta di $\sqrt{m}$ sarà $\sqrt[8]{m}$.

Parimente $\sqrt{\sqrt[3]{c}}$, cioè radice quadrata di $\sqrt[3]{c}$ sarà $\sqrt[6]{c}$. ec. Verbigrazia $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ significa 2: perchè $\sqrt{64}$ significa 8, e $\sqrt[3]{8}$ significa 2, ed il 2 è la radice sesta di 64.

Ma quando le quantità radicali ſono compoſte, non ſi puó collo ſteſſo metodo eſtrarre la radice, che ſi cerca; ed allora ſi eſprime la ricercata radice, ſcrivendo la data quantità ſotto un altro ſegno radicale, come la radice terza di $\sqrt{c}-\sqrt{m}$, ſi eſprime così $\sqrt[3]{\sqrt{c}-\sqrt{m}}$, ovvero così $\overline{\sqrt{c}-\sqrt{m}}^{\frac{1}{3}}$, e queſte chiamanſi *radicali univerſali*.

ESTRARRE LA RADICE QUADRATA DA UN BINOMIO.

198. Da un dato binomio, del quale un termine ſia razionale, e l' altro radicale, ſi potrà eſtrarre la radice quadrata, ſe il termine razionale ſarà maggiore del termine radicale; e ſe la differenza dei due quadrati di eſſi termini ſarà un quadrato, e ciò ſi ottiene in queſta maniera, cioè ſi prenda la ſuddetta differenza de' due quadrati, e la radice quadrata di eſſa ſi aggiunga primieramente alla quantità razionale; poſcia da eſſa ſi ſottragga; quindi ſi prendano le metà della ſomma, e del reſiduo, e le radici quadrate di eſſe metà ſaranno i termini della ricercata radice.

Sia dato il binomio $10-2\sqrt{21}$, o ſia $10-\sqrt{84}$ [185.], del quale ſi cerchi la radice quadrata. Faccianſi i quadrati 100, ed 84 de' due termini 10, e $-\sqrt{84}$, e ſottraggaſi 84 dal 100, e dal reſiduo 16 ſi eſtragga la radice quadrata 4, la quale ſi aggiunga al termine commenſurabile 10, ſi avrà la ſomma 14, indi eſſa radice 4 ſi ſottragga dallo ſteſſo razionale 10, il reſiduo ſarà 6. Finalmente ſi prendano le metà 7, e 3 della ſomma 14, e del reſiduo 6; e le radici di

esse metà coi segni del binomio dato, cioè $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ formeranno la radice quadrata del binomio dato $10-\sqrt{84}$.

Nella stessa maniera si troverà, che la radice quadrata di $a+c-2\sqrt{ac}$ sarà $\sqrt{a}-\sqrt{c}$; poichè dal quadrato $a^2+2ac+c^2$ della parte razionale $a+c$ sottratto il quadrato $4ac$ della radicale $-2\sqrt{ac}$, il residuo $a^2-2ac+c^2$ è un quadrato perfetto, la cui radice [170.] è $a-c$, la quale sommata colla razionale $a+c$ ci dà $2a$, e sottratta dalla stessa razionale, il residuo è $2c$, e le radici delle metà di $2a$, e di $2c$, ci danno come sopra la radice ricercata $\sqrt{a}-\sqrt{c}$.

Quando amendue i termini del binomio sono radicali, qualche volta si può anche estrarne la radice quadrata, e ciò siegue qualora la radice quadrata della differenza de' due quadrati dei due termini del binomio è comunicante, o sia commensurabile [187.] con alcuno dei termini del binomio proposto da poterla sommare, e sottrarre da esso termine. Come in questo esempio $\sqrt{96}+\sqrt{72}$ la differenza dei quadrati è $96-72=24$, la cui radice quadrata $\sqrt{24}$ è comunicante con $\sqrt{96}$; poichè [186.] abbiamo $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ e $\sqrt{96}=4\sqrt{6}$; laonde sarà $4\sqrt{6}+2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$, e $4\sqrt{6}-2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$, le metà delle quali sono $3\sqrt{6}$, e $\sqrt{6}$, e le radici quadrate di queste metà, cioè $\sqrt{3\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{6}}$, cioè [197.] $\sqrt[4]{54}+\sqrt[4]{6}$ saranno la radice quadrata del dato binomio.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
PIANA, E SOLIDA
LIBRO PRIMO.

SCIENZA UNIUERSALE DELLE RAGIONI, E PROPORZIONI DELLE QUANTITÀ.

DEFINIZIONE I.

La ragione geometrica (aritm. nn. 94. 96.) dicesi *razionale*, quando l' antecedente sta al suo conseguente, come l' unità ad un numero razionale, o come un numero razionale ad un altro numero razionale. Come la ragione $2a : 6a$ è razionale, perchè l' antecedente $2a$ sta al suo conseguente $6a$, come l' uno al tre, essendo il $2a$ terza parte di $6a$.

Medesimamente la ragione $5m : 3m$ è razionale, perchè l' antecedente $5m$ ha la stessa relazione al suo conseguente $3m$, che ha il numero razionale 5 al numero razionale 3.

Parimente la ragione $8\sqrt{5} : 2\sqrt{5}$ è razionale, perchè l'antecedente ſta al conſeguente, come il 4 all'1.

Ragione geometrica irrazionale ſi chiama quella, che non può eſprimerſi con numeri razionali. Come la ragione $2 : \sqrt{6}$ è irrazionale, perchè [aritm. n. 153.] la radice del numero 6 non ſi può eſprimere da verun numero razionale, conſeguentemente il valore $\frac{2}{\sqrt{6}}$ di queſta ragione non può eſprimerſi da verun numero razionale.

DEFINIZIONE II.

La ragione geometrica (ſia formata da termini razionali, o da termini irrazionali) diceſi *ragione di ugualità, o di uguaglianza*, quando l'antecedente è uguale al conſeguente, cioè quando il ſuo valore è l'unità; come la ragione $8 : 8$, o $m : m$, ovvero $\sqrt{a} : \sqrt{a}$, ec.

Ma quando l'antecedente non è uguale al conſeguente, allora ſi chiama *ragione d'ineguualità, o d'ineguaglianza*. Come $8 : 2$, o $3 : 12$, o pure $a : c$, ec.

DEFINIZIONE III.

Ragione geometrica di maggiore inegualità ſi dice quando l'antecedente è maggiore del conſeguente; come $8 : 2$, $12 : 3$. ec.

Che ſe l'antecedente è minore del conſeguente, allora diceſi *ragione di minore inegualità*; come $2 : 8$, $4 : 12$. ec.

DEFINIZIONE IV.

1. La ragione di maggiore inugalità diceſi *moltiplice*, quando il ſuo valore [aritm. 97.] è un numero intero. Come la ragione 6 : 2, il cui valore è $\frac{6}{2}$, cioè 3.

2. Chiamaſi *ragione ſuperparticolare*, quando il valore di eſſa è l' unità con una frazione, che abbia l' unità per numeratore. Come la ragione 6 : 4, che ha il valore $\frac{6}{4}$, cioè $1\frac{1}{2}$ [aritm. 123.].

3. Si noma *ragione ſuperparziente*, quando ha per valore l' unità, con una frazione ridotta a minimi termini, la quale non abbia l' unità per numeratore, ma qualche numero intero. Come la ragione 7 : 5, il cui valore è $\frac{7}{5}$, cioè $1\frac{2}{5}$.

4. Inoltre ſi dice *ragione moltiplice ſuperparticolare* quella, il cui valore è un numero intero, con una frazione, che, ridotta a minimi termini, abbia l' unità per numeratore; come la ragione 7 : 3, il valore della quale è $\frac{7}{3}$, cioè $2\frac{1}{3}$.

5. Finalmente ſi chiama *ragione moltiplice ſuperparziente*, quando il valore di eſſa è un numero intero, con una frazione, che, ridotta a minima eſpreſſione, abbia per numeratore qualche numero intero; come la ragione 15 : 4, il cui valore è $\frac{15}{4}$, cioè $3\frac{3}{4}$.

Altrettante sorta di ragioni di minore disugualità vi sono; cioè ragione *summultiplice*, e *sussuperparticolare*, *sussuperparziente*, *summultiplice sussuperparticolare*, e *summultiplice sussuperparziente*, le quali corrispondono alle ragioni di maggiore disugualità.

Le suddette diverse sorta di ragioni tanto di maggiore, quanto di minore inugualità si suddividono in infinite spezie diverse. Imperciocchè, per esempio, la ragione moltiplice può essere, o *dupla*, come 10 : 5, o *tripla*, come 6 : 2, o *quadrupla*, o *quintupla*, o *sestupla*, ec.

La ragione superparticolare è o *sesquialtera*, il cui antecedente contiene una volta e mezzo il conseguente; come la ragione 3 : 2; ovvero è *sesquiterza*, il cui antecedente contiene il conseguente una volta, ed un terzo, come la ragione 4 : 3; o è *sesquiquarta*, come 5 : 4; o *sesquiquinta*, o *sesquisesta*, ec.

Similmente la ragione summultiplice è o *suddupla*, come 5 : 10; o *suttripla*, come 2 : 6; o *suqquadrupla*, come 3 : 12; o *suqquintupla*, ec.

Parimente la ragione sussuperparticolare è o *sussesquialtera*, l'antecedente della quale è contenuto una volta e mezzo nel conseguente, come la ragione 2 : 3; o *sussesquiterza*, come 3 : 4; o *sussesquiquarta*, ec.

DEFINIZIONE V.

Data una geometrica ragione, se si paragona il conseguente al suo antecedente, formasi un' altra ragione che si chiama *ragione inversa*, o *reciproca* della data; come data la ragione 6 : 2, la ragione inversa di essa sarà 2 : 6.

Similmente la ragione $m : a$ è reciproca, o sia inversa della ragione $a : m$ Vicendevolmente la ragione $a : m$ è reciproca della ragione $m : a$.

COROLLARIO. Perlaqualcosa la ragione reciproca di una ragione di maggiore disugualità sarà una ragione di minore inugualità; e scambievolmente la ragione inversa di una ragione di minore disugualità sarà una ragione di maggiore inugualità. Come della ragione quadrupla 12 : 3 la reciproca sarà una ragione suqquadrupla 3 : 12. Della ragione suddupla 4 : 8 sarà inversa la ragione dupla 8 : 4, ec.

DEFINIZIONE VI.

Ragione composta si dice quella, il cui valore, o nome, è uguale al prodotto dei valori (aritm. 97.) di altre date ragioni.

La ragione 24 : 3 dicesi composta dalle due ragioni 20 : 5, e 12 : 6; perche il valore di essa $\frac{24}{3}$, cioè 8, è uguale al prodotto del 4 (valore della ragione 20 : 5) moltiplicato nel 2, valore della ragione 12 : 6.

Similmente la ragione $acm : a$ chiamasi composta dalle ragioni $bc : b$, ed $sm : s$; perchè il valore di essa $\frac{acm}{a}$, cioè cm (aritm. 68.) uguaglia il prodotto della quantità c [valore della ragione $bc : b$] nella quantità m, valore della ragione $sm : s$.

Parimente la ragione $abcm : ab$ è composta dalle ragioni $ac : a$, e $bm : b$ essendo $\frac{abcm}{ab} = \frac{ac}{a} \times \frac{bm}{b}$, cioè $cm = c \times m$.

COROLLARIO I. Dunque niuna ragione geometrica considerata in se stessa è composta; ma soltanto com-

posta si chiama, quando si rapporta ad altre ragioni, e si trova, che il suo valore è uguale al prodotto de' valori delle altre date ragioni.

COROLLARIO II. Inoltre le ragioni composte da ragioni uguali saranno parimente fra loro uguali; perciocchè le uguali ragioni hanno i valori uguali (aritm. 99.), e moltiplicando valori uguali per valori uguali, i prodotti (assioma 4.) saranno anche uguali. Così avendo le ragioni $ac:a=bc:b$, ed $rm:r=sm:s$, la ragione $acrm:ar$ [composta dalle due $ac:a$, ed $rm:r$] sarà uguale alla ragione $bcsm:bs$ composta dalle ragioni $bc:b$, ed $sm:s$; ed in fatti abbiamo $\frac{acrm}{ar}=\frac{bcsm}{bs}$, cioè $=cm$.

COROLLARIO III. Perlaqualcosa quella ragione, che avrà per antecedente il prodotto degli antecedenti di altre date ragioni, e per conseguente il prodotto de' conseguenti delle medesime ragioni, sarà composta da esse date ragioni. Come date le ragioni $a:b$, $c:m$, $r:x$, moltiplicando tra di loro gli antecedenti a, c, r, e fra loro i conseguenti b, m, x, si formerà la ragione $acr:bmx$ composta dalle date ragioni; poichè [aritm. 97.] il valore di essa $\frac{acr}{bmx}$ è uguale al prodotto dei valori $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{r}{x}$ delle altre ragioni; essendochè (aritm. 133.) egli è $\frac{a}{b}\times\frac{c}{m}\times\frac{r}{x}=\frac{acr}{bmx}$.

COROLLARIO IV. Ma se date due ragioni, si moltiplica l'antecedente della prima nel conseguente della seconda, ed il prodotto si mette per antecedente di una terza ragione, indi il prodotto del conseguente della

prima nell' antecedente della ſeconda ragione ſi mette per conſeguente della terza; allora la terza ragione, diceſi *compoſta dalla prima ragione direttamente, e reciprocamente dalla ſeconda*. Sieno date le ragioni $a : b$, e $c : m$, moltiplicando a in m, e b in c, ſi forma la ragione $am : bc$ compoſta dalla ragione $a : b$ diretta, e dalla ragione $m : c$ inverſa della ragione $c : m$ [def. 5.]; imperciocchè il valore $\frac{am}{bc}$ [aritm. 133.] è uguale al prodotto, che ſi forma moltiplicando $\frac{a}{b}$ [valore della ragione $a : b$] per $\frac{m}{c}$ valore della ragione $m : c$.

DEFINIZIONE VII.

Quando il valore di una ragione è quadrato del valore di un' altra ragione, allora quella ragione ſi chiama *duplicata, o quadrata dell' altra data ragione*.

Se il valore della prima è cubo, o terza poteſtà del valore dell' altra, allora la prima diceſi *ragione triplicata, o cubica dell' altra ragione*.

Se il valore della prima è quadrato—quadrato, o quarta poteſtà, del valore dell' altra ragione, allora ſi noma *ragione quadruplicata, o quadrato—quadrata dell' altra*.

Se è la quinta poteſtà ſi chiama *ragione quintuplicata*; e così continuando.

Perlaqualcoſa la ragione $ac^2 : a$ è duplicata, o diciamo quadrata, della ragione $bc : b$ perchè il ſuo valore c^2 è quadrato del valore c dell' altra.

Similmente la ragione 18 : 2 è quadrata della ragione 30 : 10, perchè il valore $\frac{18}{2}$, cioè 9 è quadrato del valore $\frac{30}{10}=3$.

La ragione $cm^3 : c$ è cubica; o ſia triplicata della ragione $am : a$, perchè il ſuo valore m^3 è cubo del valore m dell' altra ragione.

Parimente la ragione 24 : 3 è triplicata, o cubica della ragione 30 : 15, perchè il valore $\frac{24}{3}$, cioè 8, è cubo del valore $\frac{30}{15}$, che è 2.

COROLLARIO. Dunque una ragione compoſta da due ragioni uguali ſarà duplicata, o ſia quadrata di ciaſcuna di eſſe. Sieno le due ragioni uguali $am : a$, e $cm : c$, e con eſſe (cor. 3. def. 6.) ſi formi la ragione compoſta $acm^2 : ac$, il cui valore è m^2, quadrato del valore m di ciaſcuna delle date uguali ragioni; perciò eſſa ragione $acm^2 : ac$ è quadrata di ciaſcuna di eſſe.

Medeſimamente la ragione compoſta da tre ragioni uguali è triplicata, o ſia cubica di ciaſcuna delle date ragioni uguali.

Se una ragione è compoſta da quattro ragioni uguali, ſarà *quadruplicata* di ciaſcuna di eſſe; ſe da cinque, ſarà *quintuplicata* ec.

COROLLARIO II. Inoltre ſe data qualſivoglia ragione $a : c$, ſi quadrano i ſuoi termini, ſi forma una ragione $a^2 : c^2$ duplicata, o quadrata della ragione $a : c$, eſſen-

dochè il valore $\frac{a^2}{c^2}$ (aritm. 142.) è quadrato del valore $\frac{a}{c}$.

Ma se si faranno i cubi de' termini a, c, allora si avrà la ragione $a^3 : c^3$ cubica, o sia triplicata della ragione $a : c$; perchè [aritm. 143.] il valore $\frac{a^3}{c^3}$ è cubo del valore $\frac{a}{c}$; e così discorrendo delle altre potestà.

COROLLARIO. III. Finalmente dalle cose sopradette facilmente si puó raccogliere, che quella ragione, il cui valore è radice quadrata del valore di un' altra data ragione, si dee chiamare ragione *sudduplicata*, o *suqquadrata* dell'altra. Come la ragione $bm : b$ è suqquadrata della ragione $am^2 : a$, perchè il suo valore m, è radice quadrata del valore m^2 dell' altra ragione.

Similmente la ragione 30 : 10 è sudduplicata della ragione 18 : 2, perchè $\frac{30}{10}$, cioè il 3, è radice quadrata del valore $\frac{18}{2}$, che è 9.

Quella ragione, il cui valore è radice cubica del valore di un' altra ragione, si dice *succubica*, o *sutriplicata* dell'altra.

Se il suo valore è radice quarta, si dica *suqquadruplicata*, e così proseguendo.

ANNOTAZIONE. Attentamente si osservi, che la ragione dupla (def. 4.) è diversa dalla ragione duplicata, la tripla dalla triplicata, la suddupla dalla sudduplicata, ec. perchè

la ragione diceſi dupla in ſe ſteſſa, ed aſſolutamente, quando l' antecedente è doppio del ſuo conſeguente. Ma una ragione non mai diceſi duplicata, ſe non quando ſi riferiſce ad un' altra, e che il ſuo valore è il quadrato del valore dell' altra ragione. Lo ſteſſo dicaſi delle altre ragioni moltiplici, e moltiplicate.

DEFINIZIONE VIII.

Proporzione geometrica, o *proporzionalità*, o *analogia* ſi chiama il confronto, o paragone di due geometriche ragioni uguali. Così paragonando fra loro le due uguali ragioni 12 : 4, e 15 : 5, ſi forma la proporzione; così il 12 ſta al 4, come il 15 al 5, vale a dire, l' antecedente 12 ha la ſteſſa relazione al ſuo conſeguente 4, che ha l' antecedente 15 al ſuo conſeguente 5.

Similmente le due ragioni $am : a$, e $cm : c$ [aritm. 99.] uguali fra loro, formano la proporzione am all' a come cm al c, cioè am ha lo ſteſſo rapporto all' a, che ha il cm al c.

Perlaqualcoſa *quattro termini* ſi dicono *geometricamente proporzionali*, quando il primo ha lo ſteſſo rapporto al ſecondo, che ha il terzo al quarto.

La proporzione di quattro termini ſi ſcrive in queſta maniera 12 : 4 :: 15 : 5, o pure 12 : 4 = 15 : 5, e ſi legge *dodici al quattro, come quindici al cinque*, ovvero *dodici al quattro uguale quindici al cinque*; e così delle altre.

Il primo, e l' ultimo termine della proporzione ſi chiamano *termini eſtremi*; il ſecondo, e terzo diconſi *termini medii della ſteſſa proporzione*.

Inoltre il primo termine diceſi *primo antecedente*, ed il terzo ſi noma *ſecondo antecedente*. Il ſecondo termine chiamaſi *primo conſeguente*, ed il quarto ſi dice *ſe-*

condo conseguente della proporzione; che peró il primo, e terzo termine diconsi *termini omologi* ossia *dello stesso nome*, perchè sono amendue antecedenti. Similmente il secondo, e quarto chiamansi *termini omologi*, perchè amendue conseguenti.

Come data la proporzione $a:b::c:m$, gli estremi sono a, ed m, i termini medii sono b, c. Gli antecedenti sono a primo, e c secondo, ed i conseguenti sono b primo, ed m secondo; e conseguentemente a, e c tra di loro sono termini omologi come anche fra loro lo sono b, ed m.

DEFINIZIONE IX.

La geometrica proporzione si divide in continua, e discreta. *La proporzione geometrica continua* è quella, in cui il primo conseguente è uguale al secondo antecedente, nella quale cioè il secondo termine è uguale al terzo, e si può esprimere con tre soli termini, e viene indicata con questo segno $\div$, che si mette avanti alla proporzione. Verbigrazia la proporzione $24:12::12:6$ è continua, e si scrive in questo modo $\div 24:12:6$, e si legge; *proporzione continua ventiquattro al dodici al sei*; cioè a dire il ventiquattro al dodici ha la medesima ragione, che ha lo stesso dodici al sei.

Parimente la proporzione $a:b::b:c$ scrivesi così; $\div a:b:c$, e leggesi; *proporzione continua a al b al c*.

Perlaqualcosa nella proporzione continua il secondo termine, che chiamasi ancora *termine medio*, o *di mezzo*, è conseguente del primo, ed antecedente del terzo termine, i quali diconsi *termini estremi della medesima proporzione*.

La proporzione geometrica discreta, o *discontinua*, o *disgiunta* è quella, che non ha il secondo termine uguale

al terzo, come la proporzione $8:2::12:3$, o quest' altra $a:b::c:m$.

DEFINIZIONE X.

Progressione geometrica si chiama una serie di termini crescenti, o decrescenti secondo la medesima ragione; ovvero è una proporzione continua composta da più di tre termini.

La serie $\div 1:2:4:8:16:32:64:128:256$. ec. è una progressione geometrica crescente.

Ma la serie $\div 16:8:4:2:1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{32}:\frac{1}{64}$ ec. è una progressione geometrica decrescente, ed amendue si possono continuare all' infinito, come chiaramente si vede.

Similmente la serie $\div a:ac:ac^2:ac^3:ac^4:ac^5:ac^6$ è una progressione geometrica; siccome ancora la serie $\div ac^3:ac^2:ac:a:\frac{a}{c}:\frac{a}{c^2}:\frac{a}{c^3}:\frac{a}{c^4}$, ec. è progressione geometrica, e di esse la prima sarà crescente, e la seconda decrescente, quando c è un intero; ma al contrario quando c fosse una frazione, allora la prima sarebbe decrescente e la seconda crescente.

DEFINIZIONE XI.

Denominatore della ragione geometrica è il quoziente, che ritrovasi dividendo il termine maggiore pel minore della data ragione. Così della ragione $a:ac$ il

denominatore è $\frac{ac}{a}$, cioè c; ed il denominatore della ragione $am^5 : am^4$ è $\frac{am^5}{am^4}$, cioè m. Similmente della ragione $3 : 12$ il denominatore si è $\frac{12}{3}$, cioè 4; e quello della ragione $15 : 5$ è $\frac{15}{5} = 3$.

Perlaqualcosa nella ragione di maggiore disugualità il denominatore della ragione, ed il valore di essa sono la stessa cosa; ma nella ragione di minore inugualità il denominatore di essa uguaglia il valore della ragione inversa della data.

COROLLARIO I. Sarà dunque facil cosa il ritrovare i termini successivi di una progressione geometrica crescente, quando sono dati il primo termine a, ed il denominatore c della ragione; poichè moltiplicando il primo a nel denominatore c, sarà ac il secondo termine, il quale moltiplicato pel denominatore c produce il terzo termine ac^2, e moltiplicando il terzo ac^2 pel denominatore c, si avrà il quarto ac^3, e così continuando si troveranno gli altri termini successivamente, ed avrassi la progressione

$\div\div a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5$, ec.

Ma per ritrovare i termini successivi di una progressione decrescente, quando il denominatore della ragione sia m, ed il primo termine sia am^2; allora si divida il primo termine am^2 pel denominatore m, il quoziente am sa-

rà secondo termine, il quale diviso pel denominatore m dà per quoziente il terzo termine a; e dividendo il terzo a per m, ci dà il quarto $\frac{a}{m}$, e così proseguendo si troveranno gli altri termini, e si avrà la progressione decrescente $\div\!\!\div am^2 : am : a : \frac{a}{m} : \frac{a}{m^2} : \frac{a}{m^3} : \frac{a}{m^4}$, ec.

COROLLARIO. II. Quindi, dati il denonominatore della ragione, ed il primo termine di una progressione geometrica, facilmente si puó trovare qualunque termine della medesima progressione; basta elevare il denominatore della ragione alla potestà, che viene indicata dal numero, del termine ricercato, diminuito dell' unità, e poscia, se la progressione è crescente, moltiplicare il primo termine per essa potestà, e si avrà il ricercato termine: per esempio a trovare il quinto termine della progressione $\div\!\!\div a : ac : ac^2$, ec. Si innalzi il denominatore c alla quarta potestà, che sarà c^4, e si moltiplichi pel primo termine a, e sarà ac^4 il quinto termine ricercato.

Se si desidera il decimo termine, si innalzi il denominatore c alla nona potestà c^9, e moltiplicato il c^9 per a, sarà ac^9 il ricercato decimo termine.

Ma quando la progressione è decrescente, allora per la ritrovata potestà del denominatore si divida il primo termine, ed il quoziente sarà il termine ricercato della progressione. Così per ritrovare l' ottavo termine della progressione decrescente $\div\!\!\div ac^3 : ac^2 : ac : a : \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2}$, ec.

s' innalzi il denominatore c alla ſettima poteſtà c^7, e per eſſa ſi divida il primo termine ac^3, ed il quoziente $\frac{ac^3}{c^7}$, cioè $\frac{a}{c^4}$ (aritm. 126.) ſarà l' ottavo termine della ſudddetta progreſſione.

Similmente volendo trovare il ſettimo termine di una progreſſione decreſcente, la quale abbia 81 per primo termine, ed il denominatore della ragione ſia 3; ſi innalzi il 3 alla ſeſta poteſtà, la quale [aritm. 144.] ſarà 729, e per queſta poteſtà ſi divida il primo termine 81, ed il quoziente $\frac{81}{729}$, cioè $\frac{1}{9}$ (aritm. 126.) ſarà il ſettimo termine della progreſſione

$\div 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, come occularmente ſi vede.

Nella ſteſſa guiſa ſi puó trovare qualſivoglia altro termine di una progreſſione, ſenza che faccia d' uopo ritrovare i termini appoſti tra eſſo termine, ed il primo.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, il prodotto degli eſtremi ſarà ſempre uguale al prodotto de' medii.

Sieno dati quattro termini proporzionali $a:b::c:m$; dico, che il prodotto am degli eſtremi a, ed m, ſarà uguale al prodotto bc de' medii b, c.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè d' ipoteſi abbiamo $a:b::c:m$, oſſia (def. 8.) $a:b=c:m$; ma (aritm. 100.)

le ragioni uguali formano frazioni uguali; perciò ſarà

$\frac{a}{b}=\frac{c}{m}$; e moltiplicando queſte uguali quantità $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$

per bm [prodotto de' termini conſeguenti, oſſia de' termini b, ed m] i prodotti [aritm. 134.] ſaranno

$\frac{abm}{b}$, e $\frac{bcm}{m}$, uguali fra loro [aſſ. 4.], cioè ſarà

$\frac{abm}{b}=\frac{bcm}{m}$, vale a dire $am=bc$ (aritm. 68.); perchè

dividendo abm per b, il quoziente è am, e dividendo bcm per m ſi ha il quoziente bc.

Dunque ogni qual volta ſaranno dati quattro termini proporzionali, ſieno numeri, ſieno linee, o quantità di qualſivoglia altro genere, ſempre ſarà il prodotto de' medii uguale a quello degli eſtremi. Il che ſi dovea dimoſtrare.

Queſta propoſizione contiene la prima parte della propoſizione 16 del libro 6; e la prima parte della propoſizione 19 del libro 7 di Euclide più generalmente dimoſtrate.

COROLLARIO. Se la proporzione data ſarà continua, come $\div a:b:c$, cioè (def. 9.) $a:b::b:c$, allora, per l'antecedente dimoſtrazione, ſarà $ac=b^2$, cioè il prodotto degli eſtremi uguale al quadrato del termine medio; ciò, che da Euclide ſi dimoſtra nella prima parte della propoſ. 17. del lib. 6. per le linee; e nella prima parte della propoſ. 20. del lib. 7. per li numeri.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se quattro termini ſaranno talmente paragonati fra loro, che il prodotto del primo nel quarto ſia uguale al prodotto del ſecondo nel terzo, quei quattro termini ſaranno proporzionali.

Sieno dati i quattro termini a, c, m, s, e di tale condizione, che il rettangolo (aritm. 150.), oſſia prodotto as degli eſtremi ſia uguale al prodotto cm de' medii; dico, che i ſuddetti quattro termini ſaranno proporzionali; vale a dire ſe ſarà $as=cm$, avraſſi $a:c::m:s$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipoteſi abbiamo $as=cm$, e dividendo le uguali quantità as, cm per la medeſima grandezza cs (la quale è il prodotto del ſecondo termine c nel quarto s) i quozienti $\frac{as}{cs}$, e $\frac{cm}{cs}$, cioè [aritm. 126.] $\frac{a}{c}$, ed $\frac{m}{s}$ ſaranno fra loro uguali (aſſ. 5.); ſarà cioè $\frac{a}{c}=\frac{m}{s}$; ma [artim. 100.] le frazioni uguali formano ragioni uguali; ſarà dunque $a:c=m:s$, o ſia $a:c::m:s$.

Dunque dati quattro termini di qualunque genere, ſe il prodotto de' medii ſarà uguale al prodotto degli eſtremi, eſſi quattro termini ſaranno ſempre proporzionali.

Queſta propoſizione è converſa dell' antecedente, perchè ſuppone dato ciò, che nell' altra ſi è dimoſtrato; e dimoſtra ciò, che nell' altra era dato; e con-

tiene la ſeconda parte della propoſ. 16 del lib. 6, e la ſeconda parte della propoſ. 19 del lib. 7 d'Euclide.

COROLLARIO I. Da queſta propoſizione dimoſtrata ne viene in conſeguenza, che due prodotti uguali, o vogliamo dire qualſivoglia equazione (aritm. 102.) ſi puó ſciogliere in quattro termini proporzionali, purchè il primo, ed il quarto termine ſi prendano nella medeſima parte dell' equazione (ſieno cioè i moltiplicatori di uno degli uguali prodotti), ed il ſecondo, e terzo termine ſi prendano dall' altra parte dell' equazione, cioè ſieno i moltiplicatori dell' altro eguale prodotto; e queſta operazione chiamaſi *diſſolvere*, *diſciogliere*, *o ſciorre l' equazione*.

Sieno due prodotti uguali ab, cm, cioè ſia data l' equazioae $ab=cm$, *diſſolvendo* ſi avrà la proporzione $a:c::m:b$, ovvero $a:m::c:b$, o pure $b:c::m:a$, ovveramente $b:m::c:a$, o $c:b::a:m$, o pure $c:a::b:m$, o ſarà $m:a::b:c$, ovvero $m:b::a:c$, perchè i quattro termini ſempre ſi trovano talmente diſpoſti, che il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto de' medii, eſſendo d' ipoteſi $ab=cm$.

Similmente data l' equazione numerica $12\times4=24\times2$, diſſolvendo ſarà $12:24::2:4$, oppure $12:2::24:4$, ovvero $4:24::2:12$, o ſarà $4:2::24:12$, ovveramente $24:12::4:2$, ec. Come evidentemente ſi vede.

COROLLARIO II. Ma ſe foſſe data l' equazione $c=am$, vale a dire [aritm. 24.] $1c=am$, allora diſſolvendo ſi avrà $a:c::1:m$, oppure $1:a::m:c$, ec. E da queſt' ultima proporzione rimane dimoſtrato, che in ogni moltiplicazione l' unità ſta ad uno de' moltiplicatori a, come l' altro moltiplicatore m ſta al prodotto c; poichè in queſta ipoteſi la quantità c ſignifica il podotto di a in m.

COROLLARIO III. Se ſarà data l' equazione $am=c^2$, diſſolvendo ne naſcerà la proporzione $a:c::c:m$, o ſia $\div a:c:m$ [def. 9.], e qui rimane dimoſtrato, che ſe tre termini, a, c, m ſaranno di tal condizione, che il prodotto, o rettangolo am del primo nel terzo ſia uguale al quadrato c^2 del ſecondo, cioè del termine medio, allora quei tre termini ſaranno fra loro in proporzione continua. In queſto corollario contengonſi la ſeconda parte della propoſ. 17. del lib. 6, e la ſeconda parte della propoſ. 20. del 7. lib. d'Euclide.

COROLLARIO IV. Moltiplicando l' equazione $am=c^2$ per a (aſſ. 4.) ſi avrà $a^2m=ac^2$, e diſſolvendo ſarà $a:m::a^2:c^2$; ma moltiplicandola per m ſarà $am^2=c^2m$, e diſſolvendo ſi avrà $a:m::c^2:m^2$. E queſto dimoſtra, che dati tre termini in proporzione continua $\div a:c:m$, il primo ſtarà al terzo, come il quadrato del primo al quadrato del ſecondo, ovvero come il quadrato del ſecondo al quadrato del terzo; vale a dire il primo al terzo ha ragione duplicata di quella, che ha il primo al ſecondo, o il ſecondo al terzo.

Sia $\div 3:6:12$, ſarà $3:12::9:36$, oppure $3:12::36:144$, come chiaro appare.

COROLLARIO. V. Se ſarà $a=b$, e le uguali quantità a, e b ſi moltiplicheranno per una terza c [aſſ. 4.] ſi avrà $ac=bc$, e diſſolvendo ſarà $a:c::b:c$, ovvero $c:a::c:b$. Dunque le quantità uguali hanno la medeſima ragione ad una terza, e ſcambievolmente una terza grandezza ha lo ſteſſo rapporto alle quantità uguali.

E' la propoſ. 7. del lib. 5. d'Euclide.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, in primo luogo saranno ancora proporzionali il secondo al primo, come il quarto al terzo; e quest' argomentazione dicesi *invertire la ragione*: in secondo luogo sarannno parimente proporzionali il primo al terzo, come il secondo al quarto; e questo modo di argomentare chiamasi *alternare, o permutare la ragione*.

Sieno i quattro termini proporzionali $a:b::c:m$, 1. *invertendo* sarà $b:a::m:c$.

2. alternando, o permutando si avrà $a:c::b:m$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè d' ipotesi abbiamo $a:b::c:m$, dunque [propos. 1.] sarà $am=bc$, e dissolvendo [cor. 1. propos. antec.] si avrà $b:a::m:c$, medesimamente sarà $a:c::b:m$.

Che peró dati quattro termini proporzionali, invertendogli, o alternandogli sempre rimarranno proporzionali. Il che, ec.

La prima parte di questa proposizione contiene il corollario della propos. 4. del lib. 5.; e la seconda è la proposizione 16. dello stesso lib. 5, ed insieme la propos. 13. del lib. 7 d' Euclide.

Sia $24:8::12:4$, invertendo sarà $8:24::4:12$, ed alternando si avrà $24:12::8:4$.

ANNOTAZIONE. I quattro termini proporzionali $a:b::c:m$ invertendogli dannò ancora la proporzione $m:c::b:a$, essendo la stessa cosa il dire $b:a=m:c$, o pure $m:c=b:a$. Inoltre alternando la proporzione $m:c::b:a$ si avrà $m:b::c:a$; dunque dati i quattro termini proporzionali $a:b::c:m$ inversamente alternan-

dogli ſarà $m:b::c:a$; cioè il quarto al ſecondo, come il terzo termine al primo.

Sicchè avendo $24:8::12:4$, invertendogli ſarà ancora $4:12::8:24$; ed alternandogli inverſamente ſi avrà $4:8:12:24$.

COROLLARIO I. Quindi dati quattro termini proporzionali $a:c::m:r$, ſe ſarà $a=m$, avremo ancora $c=r$; ma ſe ſarà $a>m$ ſi avrà eziandio $c>r$; e finalmente ſe ſi troverà $a<m$, ſi avrà parimente $c<r$; perchè alternando la data proporzione abbiamo $a:m::c:r$, o pure $r:c::m:a$.

E' la propoſ. 14. del lib. 5. d' Euclide.

COROLLARIO II. Perlaqualcoſa ſe avraſſi $a:m::c:m$, o pure $m:a::m:c$, perchè egli è $m=m$, ſarà eziandio $a=c$. Dunque le quantità, le quali hanno la medeſima ragione ad una terza ſono uguali fra loro. Similmente uguali fra loro ſono quelle quantità alle quali una terza grandezza ha la medeſima ragione.

E' la propoſ. 9. del lib. 5. d' Euclide.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Avendo quattro termini proporzionali, la ſomma del primo col ſecondo avrà la medeſima ragione al ſecondo, che ha la ſomma del terzo col quarto allo ſteſſo quarto termine. Queſta maniera d' argomentare ſi dice *comporre la ragione*.

Sia la proporzione $a:b::c:m$, *componendo* ſarà $a+b:b::c+m:m$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè d' ipoteſi abbiamo $a:b::c:m$, perciò [propoſ. 1.] avremo l' equazione $am=bc$, ed a ciaſcuna parte dell' equazione aggiugnendovi bm [prodotto de' due conſeguenti] ſi for-

merà [aſſ. 2.] l' equazione $am+bm=bc+bm$, oſſia
$\overline{a+b}\times m=\overline{c+m}\times b$ [aritm. 61.], e diſſolvendo [cor. 1. propoſ. 2.] ſi avrà la proporzione $a+b:b::c+m:m$. Il che ec.

E' la propoſ. 18. del lib. 5. d' Euclide.

Sia 15 : 5 : : 6 : 2, componendo ſarà 15+5 : 5 : : 6+2 : 2, cioè 20 : 5 : : 8 : 2, come chiaramente ſi vede.

COROLLARIO I. Se all' equazione $am=bc$ ſi aggiugnerà ac [prodotto dei due antecedenti della data proporzione $a:b::c:m$], allora [aſſ. 2.] ſi avrà queſt' altra equazione $ac+am=ac+bc$, cioè
$\overline{c+m}\times a=\overline{a+b}\times c$ (aritm. 61.), e diſſolvendo naſcerà la proporzione $a+b:a::c+m:c$; vale a dire la ſomma del primo col ſecondo ſta al primo termine, come la ſomma del terzo col quarto ſta al terzo.

Eſſendo 15 : 5 : : 6 : 2, per compoſizione di ragione ſarà ancora 15+5 : 15 : : 6+2 : 6, cioè 20 : 15 : : 8 : 6.

COROLLARIO. II. Inoltre alternando [ſeconda parte della propoſ. 3.] la data proporzione $a:b::c:m$, ſi avrà $a:c::b:m$, e componendo [dimoſtrazione antec.] ſarà $a+c:c::b+m:m$, oppure (per l' antecedente cor.) ſi avrà $a+c:a::b+m:b$, vale a dire componendo, ſtarà la ſomma degli antecedenti ad uno di eſſi, come la ſomma de' termini conſeguenti al corriſpondente conſeguente.

Avendo 15 : 5 : : 6 : 2, componendo gli antecedenti e conſeguenti ſarà 15+6 : 6 : : 5+2 : 2, cioè
21 : 6 : : 7 : 2, e ſarà ancora 15+6 : 15 : : 5+2 : 5, cioè
21 : 15 : : 7 : 5.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

In ogni proporzione geometrica la differenza tra il primo, e ſecondo termine ſta allo ſteſſo ſecondo, come la differenza tra 'l terzo, e quarto al medeſimo quarto termine. Queſta ſorta d' argomentazione diceſi *divider la ragione*.

Sia la proporzione $a:b::c:m$, *dividendo* ſarà $a-b:b::c-m:m$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla data proporzione $a:b::c:m$ [propoſ. 1.] ne naſce l' equazione $am=bc$, e da amendue le parti di eſſa ſottraendo la ſteſſa quantità bm, [aſſ. 3.] rimarrà l' equazioue $am-bm=bc-bm$, cioè $\overline{a-b}\times m=\overline{c-m}\times b$ [aritm. 61.], e diſſolvendo (cor. 1. propoſ. 2.) ſi avrà $a-b:b::c-m:m$. La qual coſa ſi dovea dimoſtrare.

E' la propoſ. 17. del lib. 5. d' Euclide.

Sia $18:3::12:2$, dividendo ſarà $18-3:3::12-2:2$, cioè $15:3::10:2$.

COROLLARIO I. Se ambedue le parti dell' antecedente equazione $am=bc$ ſi ſottrarranno da ac (prodotdotto degli antecedenti della data proporzione $a:b::c:m$) allora [aſſ. 3.] reſterà $ac-am=ac-bc$, cioè $\overline{c-m}\times a=\overline{a-b}\times c$, e diſſolvendo ſarà $a:a-b::c:c-m$; vale a dire il primo termine della data proporzione ſta alla differenza tra 'l primo, e ſecondo, come il terzo alla differenza fra il terzo, e 'l quarto. Queſto modo d' argomentare ſi chiama *convertire la ragione*. Ed è la propoſ. 19. del lib. 5. d' Euclide.

Essendo $a : a-b :: c : c-m$, invertendo sarà $a-b : a :: c-m : c$, cioè nella data proporzione $a : b :: c : m$ la differenza dei due primi termini sta al primo, come la differenza dei due terzo, e quarto sta al terzo.

Se sarà $18 : 6 :: 12 : 4$, *convertendo* si avrà $18 : 18 - 6 :: 12 : 12-4$, cioè $18 : 12 :: 12 : 8$, e sarà eziandio $18-6 : 18 :: 12-4 : 12$ o sia $12 : 18 :: 8 : 12$.

COROLLARIO II. Inoltre alternando la data proporzione $a : b :: c : m$, si avrà $a : c :: b : m$, e dividendo sarà $a-c : c :: b-m : m$, cioè la differenza tra i due antecedenti sta al secondo antecedente, come la differenza de' due conseguenti al secondo conseguente.

Ma convertendo la proporzione $a : c :: b : m$ (corol. antec.) sarà $a : a-c :: b : b-m$, ed invertendo sarà ancora $a-c : a :: b-m : b$, cioè la differenza degli antecedenti al primo antecedente ha la stessa ragione, che la differenza de' conseguenti al primo conseguente.

Sia $18 : 6 :: 12 : 4$, sarà eziandio $18-12 : 12 :: 6-4 : 4$, cioè $6 : 12 :: 2 : 4$; ed inoltre sarà $18-12 : 18 :: 6 -4 : 6$, cioè $6 : 18 :: 2 : 6$, ec.

COROLLARIO III. Dati quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$ componendogli [propos. 4.] abbiamo $a+b : b :: c+m : m$, e dividendogli (dimostr. antec.) si ha $a-b : b :: c-m : m$; perció (parte seconda propos. 3) alternando queste due proporzioni si avrà $a+b : c+m :: b : m$, ed $a-b : c-m :: b : m$; dunque (ass. 1.) sarà $a+b : c+m :: a-b : c-m$, ed alternando si avrà $a+b : a-b :: c+m : c-m$; cioè la somma de' due termini della prima ragione sta alla loro differenza, come la somma dei due termini della seconda ragione sta alla differenza dei medesimi termini. Questa argomentazione si chiama *mischiare la ragione*.

Inoltre essendosi (cor. 2. propos. 4.) dimostrato essere $a+c : a :: b+m : b$, ed (cor. antec.) $a-c : a$

$:: b-m : b$, *mischiando* sarà $a+c : a-c :: b+m : b-m$; vuolsi dire la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma de' conseguenti alla differenza di essi.

Se abbiamo $18 : 6 :: 12 : 4$, mischiando sarà $18+6 : 18-6 :: 12+4 : 12-4$, cioè $24 : 12 :: 16 : 8$; sarà inoltre $18+12 : 18-12 :: 6+4 : 6-4$, cioè $30 : 6 :: 10 : 2$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, sarà il primo al quarto, come il quadrato del primo al prodotto de' medii; o come il prodotto de' medii al quadrato del quarto. Il prodotto poi de' termini medii sarà medio proporzionale tra il quadrato del primo, ed il quadrato del quarto termine.

Sia la proporzione $a : b :: c : m$, sarà $a : m :: a^2 : bc$, ed $a : m :: bc : m^2$; di più sarà $\div a^2 : bc : m^2$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla proporzione $a : b :: c : m$. [propos. 1.] ne nasce l'equazione $bc = am$, la quale moltiplicata per a (ass. 4) ci dà $abc = a^2 m$, e dissolvendo si avrà $a : m :: a^2 : bc$.

Ma moltiplicando per m la equazione $am = bc$ [ass. 4.] avrassi $am^2 = bcm$, e dissolvendo sarà $a : m :: bc : m^2$.

Inoltre essendosi dimostrato essere $a : m :: a^2 : bc$, ed $a : m :: bc : m^2$ perciò (ass. 1.) sarà eziandio

$a^2 : bc :: bc : m^2$, cioè $\div a^2 : bc : m^2$. Il che ſi dovea dimoſtrare.

Sia $8 : 2 :: 12 : 3$, ſarà $8 : 3 :: 64 : 24$; ed $8 : 3 :: 24 : 9$; ed inoltre $\div 64 : 24 : 9$.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Date due, o più proporzioni geometriche di tal condizione, che i conſeguenti della prima ſieno anche antecedenti della ſeconda, ed i conſeguenti della ſeconda ſieno parimente antecedenti della terza, e così proſeguendo, ſe ſaranno più proporzioni; io dico, che il primo antecedente della prima ſtarà al primo conſeguente dell' ultima proporzione, come il ſecondo antecedente della prima al ſecondo conſeguente dell' ultima proporzione; e queſto ſi chiama argomentare per l' *ugualità ordinata*, o ſia *ordinando*.

Sieno date le geometriche proporzioni $a : b :: e : r$, $b : c :: r : s$, e $c : m :: s : t$, nelle quali i conſeguenti b ed r della prima ſono anche antecedenti della ſeconda, ed i conſeguenti c ed s della ſeconda ſono ancora antecedenti della terza proporzione, dico, che ordinando ſarà $a : m :: e : t$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè, d' ipoteſi, abbiamo $a : b :: e : r$, $b : c :: r : s$, $c : m :: s : t$, ed alternandole tutte tre (ſeconda parte propoſ. 3.) avremo $a : e :: b : r$, $b : r :: c : s$, $c : s :: m : t$, dunque (aſſ. 1.) ſarà $a : e :: m : t$, ed alternando ſi avrà $a : m :: e : t$, cioè il primo termine della prima proporzione al ſecondo dell' ultima, come il terzo termine della prima al quarto dell' ultima proporzione. Il che ec.

Contiene le propos. 20, e 22 del lib. 5; e la 14 del 7. lib. d' Euclide.

Sieno 12 : 15 :: 4 : 5, 15 : 6 :: 5 : 2, 6 : 21 :: 2 : 7, 21 : 3 :: 7 : 1, 3 : 27 :: 1 : 9, ordinando sarà 12 : 27 :: 4 : 9, come occularmente si vede.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due, o più geometriche proporzioni saranno talmente tra di loro paragonate, che i termini medii della prima sieno ancora termini estremi della seconda, ed i termini medii della stessa seconda proporzione sieno anche termini estremi della terza, e così continuando; dico, che starà il primo termine della prima proporzione al secondo dell' ultima, come il terzo della stessa ultima proporzione al quarto della prima. E questo dicesi argomentare per l' *ugualità perturbata*, o *perturbando*.

Sieno le proporzioni $a : b :: s : t$, $b : c :: m : s$, $c : r :: x : m$ colla suddetta condizione, che i termini b, s medii della prima sono anche estremi della seconda, ed i termini medii c, m della seconda sono ancora gli estremi della terza; dico, che perturbando sarà $a : r :: x : t$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle date proporzioni $a : b :: s : t$, $b : c :: m : s$, $c : r :: x : m$, moltiplicando i medii, e gli estremi [propos. 1.] si formano le equazioni $at = bs$, $bs = cm$, $cm = rx$; laonde [ass. 1.] sarà $at = rx$, e dissolvendo si avrà $a : r :: x : t$. Il che si dovea dimostrare.

Contiene le propos. 21. e 23. del lib. 5, e la 22 del lib. 7 d' Euclide.

Sieno le proporzioni 3 : 6 :: 12 : 24, 6 : 18 :: 4 : 12, 18 : 9 :: 8 : 4, 9 : 36 :: 2 : 8, perturbando ſarà 3 : 36 :: 2 : 24.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se ſaranno più quantità proporzionali, o ſia più ragioni uguali, allora *raccogliendo* ſtarà la ſomma di tutti gli antecedenti alla ſomma di tutti i conſeguenti, come qualſivoglia antecedente al ſuo conſeguente.

Sieno le quantità proporzionali, o ſia le ragioni uguali $a:b::c:m::s:t$, raccogliendo ſarà $a+c+s:b+m+t::a:b$, ovvero $::c:m$, ec.

DIMOSTRAZIONE. Perchè d' ipoteſi abbiamo $a:b::c:m$, perció componendo (cor. 2. propoſ. 4.) ſarà $a+c:c::b+m:m$, ed alternando ne naſce $a+c:b+m::c:m$; ma per ipoteſi abbiamo $c:m::s:t$; dunque [aſſ. 1.] ſarà $a+c:b+m::s:t$, e componendo ſi avrà $a+c+s:s::b+m+t:t$, e permutando ſarà $a+c+s:b+m+t::s:t$; ma per l' ipoteſi ſta $s:t::c:m$ $::a:b$, adunque [aſſ. 1.] ſarà ancora $a+c+s:b+m$ $+t::a:b$, o $::c:m$, ec. Se dunque ſaranno più grandezze proporzionali, ec. Il che, ec.

E' la propoſ. 12 del lib. 5, e la 12 del lib. 7 d' Euclide.

Sieno 20 : 5 :: 4 : 1 :: 12 : 3 :: 8 : 2, raccogliendo ſi avrà la proporzione 20+4+12+8 : 5+1+3+2 :: 4 : 1, cioè 44 : 11 :: 4 : 1, o :: 20 : 5, ec.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Dati tre termini, trovare il quarto proporzionale Sieno dati i tre termini a, c, m, e ſi debba trovarne un quarto, al quale il terzo m abbia lo ſteſſo rapporto, che ha il primo a al ſecondo c.

RISOLUZIONE. Si moltiplichi il ſecondo c pel terzo m, ed il prodotto cm ſi divida pel primo a; il quoziente $\frac{cm}{a}$ [aritm. 69.] ſarà il quarto ricercato termine proporzionale.

DIMOSTRAZIONE. Il quarto incognito termine ſi chiami x (aritm. 21.), ed allora ſi avrà la proporzione $a : c :: m : x$, perciò [propoſ. 1.] ſarà $ax = cm$, e dividendo queſt' equazione per a (aſſ. 5.) rimarrà $x = \frac{cm}{a}$. Dunque il ricercato quarto termine proporzionale, che ſi era chiamato x, è uguale al quoziente, che naſce dividendo pel primo termine a il prodotto cm del ſecondo nel terzo. La qual coſa ſi dovea fare, e dimoſtrare.

Sia $a = 3$, $c = 12$, ed $m = 7$, e ſarà $x = \frac{12 \times 7}{3} = \frac{84}{3}$, cioè $x = 28$; ed infatti egli è $3 : 12 :: 7 : 28$.

ANNOTAZIONE. In queſto problema ſi è dimoſtrata la principale delle quattro regole dell' aritmetica, la quale ſi chiama *regola delle proporzioni*, anzi per la ſua eccellenza, ed utilità grandiſſima diceſi *regola aurea delle proporzioni*; e volgarmente chiamaſi *regola del tre*,

perche dati tre termini, per mezzo di queſta regola ſi trova l' incognito quarto termine proporzionale.

Le altre tre regole aritmetiche, cioè la *regola delle compagnie*, o *delle ſocietà*; la *regola di falſa poſizione*, o *del falſo*, e la *regola di allegazione* molto dipendono da queſta regola delle proporzioni, come ſi puó oſſervare negli Autori, che trattano ex profeſſo dell' aritmetica.

Ma per riſolvere le quiſtioni aritmetiche con queſta regola ſi dee attentamente avvertire, che due dei tre dati termini ſono ſempre dello ſteſſo genere tra di loro, e l' altro che rimane è del medeſimo genere col quarto ricercato; ed eſſi tre termini ſi deono diſporre in maniera, che il termine omogeneo col quarto ſi metta nel luogo di mezzo, cioè nel ſecondo luogo; e nel terzo luogo ſcrivaſi quello, di cui ſi cerca qualche coſa, e nel primo luogo ſi metta il rimanente termine omogeneo col terzo, come ſi può vedere nel ſeguente eſempio.

Un corriere addimanda in quante ore potrà fare 420 miglia, camminando colla ſteſſa velocità, colla quale altra volra fece 72 miglia in 12 ore.

In queſto problema il termine omogeneo col quarto incognito ſono le ore 12, che ſi deono porre per ſecondo termine; il termine, di cui ſi cerca qualche coſa, ſono le miglia 420, dunque ſi ſcriva in terzo luogo; e per primo termine ſi metta il rimanente 72 in queſta maniera

miglia ore miglia ore

$72 : 12 :: 420 : x$.

Poſcia per l' antecedente dimoſtrazione ſi moltiplichi il terzo 420 pel ſecondo 12, ed il prodotto 5040 ſi divida pel primo termine 72, ed il quoziente 70 ſarà il quarto ricercato termine proporzionale; dunque il ſuddetto corriere percorrerà le 420 miglia nel

tempo di 70 ore, cioè di giorni 2, ore 22. imperciocchè abbiamo 72 : 12 : : 420 : 70, essendo 72×70=12×420.

Quando la quistione contiene più di tre termini, cioè cinque, o sette, ovvero nove, ec. Allora dicesi *regola delle proporzioni*, o *del tre composta*, e si risolve con due, o più regole semplici, e spessissime volte si riduce ad una sola regola semplice, perchè tra i dati termini i principali sono sempre tre, e gli altri meno principali colla moltiplicazione si congiungono con i più principali, come si può osservare nella seguente quistione.

Cinquanta soldati spesero 600 lire in 8 giorni, ora si vorrebbe sapere quante lire spenderanno 80 soldati in quindici giorni.

I principali termini di questo problema sono i soldati 50, le lire 600, ed i soldati 80; ai 50 soldati s' appartengono gli 8 giorni, ed agli 80 soldati appartengono i giorni 15; che però si moltiplichino il 50 per l' 8, e l' 80 per 15; il primo prodotto 400 sarà il primo termine; ed il secondo prodotto 1200 sarà il terzo termine, ed il termine medio saranno le lire 600; perciò si avrà una regola semplice 400 : 600 : : 1200 : ec., e moltiplicando 600 per 1200, indi dividendo il prodotto 720000 per 400, il quoziente 1800 sarà il numero ricercato delle lire, che spenderanno gli 80 soldati in quindici giorni.

ANNOTAZIONE. Quando quattro termini sono proporzionali, allora permutando [seconda parte propos. 3] il primo al terzo ha sempre lo stesso rapporto, che ha il secondo al quarto. Ma alcune volte si trovano delle quistioni di tale natura, che il primo termine sta al terzo reciprocamente come il quarto al secondo, ed allora si risolvono colla regola, che si chiama *regola*

del tre inversa, o *rovescia*, e si trova il quarto termine incognito moltiplicando il primo pel secondo, e dividendo il prodotto pel terzo termine.

Sieno per esempio i tre termini a, b, c, e si cerchi il quarto x con tale condizione, che sia $a:c::x:b$, ed allora [propos. 1.] sarà $cx=ab$, e dividendo l' equazione per c (ass. 5.) rimarrà $x=\frac{ab}{c}$; dunque il quarto termine ricercato x è uguale al quoziente, che nasce dividendo il prodotto ab del primo a nel secondo b pel terzo termine c. Eccone un esempio.

Il governatore d' una fortezza assediata facendo ogni giorno distribuire oncie 18 di pane a ciascun soldato, trovò d' avere la provvisione necessaria per mesi 4; ma avendo ricevuto avviso, che il soccorso non poteva giugnere se non dopo mesi 5, vorrebbe sapere quante oncie di pane debba far distribuire giornalmente a ciascun soldato, acciocchè la medesima provvisione gli basti per mesi 5. In questo quesito si vede chiaramente, che crescendo il numero dei mesi, il numero delle oncie del pane dee diminuirsi, perciò si dovrà risolvere colla regola del 3 inversa; i termini però si deono ordinare come nella diretta, cioè per terzo termine si dee mettere quello, di cui si cerca qualche cosa, il suo omogeneo sarà primo termine, e termine medio si metta quello, che è dello stesso genere col quarto ricercato. Sarà perciò mesi oncie mesi

4 : 18 ... 5 : ec., e moltiplicando il primo 4 nel secondo 18, il prodotto 72 si divida pel terzo 5, ed il quoziente $14\frac{2}{5}$ sarà il ricercato numero; poichè (propos. 2.) è $4:5::14\frac{2}{5}:18$, dun-

que il governatore dovrà giornalmente far distribuire oncie $14\frac{2}{5}$ a ciascun soldato, e la provvisione gli basterà per mesi 5.

Se la quistione conterrà più di tre termini, cioè cinque, o sette, ec., allora si dirà regola del tre inversa, e composta, e si risolve con due, o più regole semplici, e qualche volta si può ridurre ad una sola regola semplice. Ma spesse volte accade, che la quistione composta di più termini si dee risolvere in parte con regole del tre semplici dirette, e parte con regole del tre semplici inverse, come si potrà osservare negli Autori di aritmetica.

COROLLARIO. Dati due termini a, c, di una proporzione continua, si troverà il terzo proporzionale dividendo il quadrato del secondo pel primo termine; imperciocchè mettendo x per terzo termine ricercato, si avrà la proporzione continua $\div a : c : x$; laonde [cor. propos. 1.] sarà $ax = c^2$, e dividendo l' equazione per a [ass. 5.] rimarrà $x = \frac{c^2}{a}$. In conseguenza il terzo termine di una proporzione continua è uguale al quoziente, che si ricava dividendo il quadrato del secondo termine pel primo.

Ma essendo dati il primo termine a, ed il terzo m d' una proporzione continua, per trovare il termine medio proporzionale, dal prodotto am del primo nel terzo si estragga la radice quadrata, la quale sarà il secondo termine ricercato.

Imperciocchè chiamando x il ricercato termine medio, si avrà la proporzione continua $\div a : x : m$, e conseguentemente [cor. propos. 1.] sarà $x^2 = am$, e da

queſte uguali quantità eſtraendo la radice quadrata (aritm. 179.) ſi avrà $x=\sqrt{am}$.

Sia $a=18$, ed $m=2$, ſarà $x=\sqrt{18\times2}=\sqrt{36}$, cioè $x=6$; e però ſi avrà $\div 18 : 6 : 2$.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali $a:b::c:m$, ſe gli antecedenti, o i conſeguenti, ovvero il primo, e ſecondo termine, o il terzo, e quarto, oppure tutti quattro i termini ſi moltiplicheranno, o ſi divideranno per una medeſima quantità s, i quattro termini rimarranno ſempre proporzionali.

DIMOSTRAZIONE. Avendo d' ipoteſi $a:b::c:m$ perciò [propoſ. 1.] ſi avrà l' equazione $am=bc$, la quale moltiplicata per s [aſſ. 4.] ci darà $ams=bcs$, e diſſolvendo [cor. 1. propoſ. 2.] ſi avrà $as:b::cs:m$, o $a:bs::c:ms$, ovvero $as:bs::c:m$, o pure $a:b::cs:ms$.

Ma ſe l' equazione $am=bc$ ſi moltiplicherà per s^2, allora (aſſ. 4.) ſi otterrà $ams^2=bcs^2$, e diſſolvendo ſarà $as:bs::cs:ms$.

Che ſe la medeſima equazione $am=bc$ ſi dividerà per s (aſſ. 5.) reſterà $\frac{am}{s}=\frac{bc}{s}$, e diſſolvendo ſarà

$\frac{a}{s}:b::\frac{c}{s}:m$ o pure $a:\frac{b}{s}::c:\frac{m}{s}$, ovvero $\frac{a}{s}:\frac{b}{s}$ $::c:m$, o $a:b::\frac{c}{s}:\frac{m}{s}$, perchè ſempre il prodotto degli eſtremi uguaglia il prodotto de' medii.

Finalmente dividendo la ſteſſa equazione $am=bc$ per s^2 [aſſ. 5.] reſterà $\frac{am}{s^2}=\frac{bc}{s^2}$, e diſſolvendo ſi avrà la proporzione $\frac{a}{s} : \frac{b}{s} :: \frac{c}{s} : \frac{m}{s}$. Dunqne dati quattro termini, ec. Il che, ec.

COROLLARIO. Se la ſteſſa equazione $am=bc$ ſi moltiplicherà per rs, ſi avrà $amrs=bcrs$, e diſſolvendo ſarà $ar : bs :: cr : ms$, ovvero $ar : br :: cs : ms$.

Che ſe l' equazione $am=bc$ ſi dividerà per rs, rimarrà $\frac{am}{rs}=\frac{bc}{rs}$, e diſſolvendo fia $\frac{a}{r} : \frac{b}{s} :: \frac{c}{r} : \frac{m}{s}$, o pure $\frac{a}{r} : \frac{b}{r} :: \frac{c}{s} : \frac{m}{s}$. Dunque data la proporzione $a : b :: c : m$, ſe gli antecedenti per una quantità, ed i conſeguenti per un' altra, ovvero i due primi termini per una, ed i due ultimi per un' altra quantità ſi moltiplicheranno, o ſi divideranno, ſempre i quattro termini rimarranno proporzionali.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se due, o più proporzioni avranno i medeſimi conſeguenti; allora la ſomma de' primi antecedenti ſtarà al loro comune conſeguente, come la ſomma de' ſecondi antecedenti al loro comune conſeguente.

Sieno le proporzioni $a : b :: c : m$, ed $r : b :: s : m$ aventi gli ſteſſi conſeguenti b, ed m, ſarà $a+r : b :: c+s : m$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle proporzioni $a:b::c:m$, ed $r:b::s:m$ si formano (propos. 1.) le equazioni $am=bc$, ed $rm=bs$, ed aggiugnendo cose uguali a cose uguali [ass. 2.] si avrà $am+rm=bc+bs$, cioè $\overline{a+r}\times m=\overline{c+s}\times b$, e dissolvendo sarà $a+r:b::c+s:m$. Il che ec.

E' la propos. 24. del lib. 5. d' Euclide.

Sia $12:4::15:5$, e $20:4::25:5$, sarà $12+20:4::15+25:5$, cioè $32:4::40:5$.

COROLLARIO. Ma se due, o più proporzioni $a:b::c:m$, $a:r::c:s$, ec. avranno i medesimi antecedenti a, c, allora perchè invertendo [prima parte propos. 3.] si formano le proporzioni $b:a::m:c$, ed $r:a::s:c$ aventi gli stessi conseguenti, perciò (dimostr. antec.) sarà $b+r:a::m+s:c$, ed invertendo si avrà $a:b+r::c:m+s$. Dunque se due, o più proporzioni avranno i medesimi antecedenti, allora il primo comune antecedente starà alla somma de' suoi conseguenti, come il secondo comune antecedente alla somma de' suoi conseguenti.

Avendo $5:7::15:21$, e $5:10::15:30$, per questo corollario sarà $5:17::15:51$.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Date due proporzioni, moltiplicando, o dividendo i termini dell' una per i corrispondenti termini dell'altra, i prodotti nel primo caso, ed i quozienti nel secondo rimarranno ancora proporzionali.

Sieno le due proporzioni $a:b::c:m$, ed $r:s::t:u$; primo sarà $ar:bs::ct::mu$; in secondo luogo si avrà

$$\frac{a}{r}:\frac{b}{s}::\frac{c}{t}:\frac{m}{u}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo d' ipotesi $a:b::c:m$, ed $r:s::t:u$,

perció (propos. 1.) sarà $am=bc$, ed $ru=st$, e moltiplicando am per ru, e bc per st, si otterrà (ass. 4.) $amru=bcst$, e dissolvendo sarà $ar:bs::ct:mu$. Il che si dovea in primo luogo dimostrare.

2. Dividendo l' equazione $am=bc$ per l' equazione $ru=st$ (ass. 5.) rimarrà $\frac{am}{ru}=\frac{bc}{st}$, e dissolvendo sarà $\frac{a}{r}:\frac{b}{s}::\frac{c}{t}:\frac{m}{u}$. Il che ec.

Sieno $24:18::48:36$, e $2:3::6:9$, sarà $24\times2:18\times3::48\times6:36\times9$, cioè $48:54::288:324$.

Inoltre sarà $\frac{24}{2}:\frac{18}{3}::\frac{48}{6}:\frac{36}{9}$, cioè $12:6::8:4$.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, le uguali potestà, e le uguali radici di essi termini saranno eziandio proporzionali.

1. Sia $a:b::c:m$, sarà $a^2:b^2::c^2:m^2$; $a^3:b^3::c^3:m^3$, ec.

DIMOSTRAZIONE. Scrivasi due volte la proporzione $a:b::c:m$, indi si moltiplichino tra di loro i corrispondenti termini, e [propos. antec.] si avrà $a^2:b^2::c^2:m^2$; e moltiplicando i termini di questa per i corrispondenti termini della data proporzione

$a:b::c:m$, si otterrà $a^3:b^3::c^3:m^3$, e così continuando si avrà $a^4:b^4::c^4:m^4$, ec.

2. Se sarà data la proporzione $a^2:b^2::c^2:m^2$; o pure $a^3:b^3::c^3:m^3$, ec. sarà parimente $a:b::c:m$.

DIMOSTRAZIONE. Avendo d'ipotesi $a^2:b^2::c^2:m^2$, si avrà (propos. 1.) $a^2m^2=b^2c^2$, ed estraendo la radice quadrata (aritm. 179.) resterà $am=bc$, e dissolvendo sarà $a:b::c:m$.

Col medesimo raziocinio, se sarà $a^3:b^3::c^3:m^3$, si dimostrerà essere parimente $a:b::c:m$, estraendo la radice cubica.

Similmente avendo $r:s::t:u$, si dimostrerà essere $\sqrt{r}:\sqrt{s}::\sqrt{t}:\sqrt{u}$, ec. Il che, ec.

Sia $3:2::9:6$, quadrando sarà $9:4::81:36$. Ma dalla stessa proporzione $3:2::9:6$ estraendo la radice quadrata da ciascun termine si avrà

$\sqrt{3}:\sqrt{2}::3:\sqrt{6}$; essendo il prodotto de' medii $3\sqrt{2}$ [aritm. 189.] uguale al prodottto $\sqrt{18}$ degli estremi; poichè $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ (aritm. 186.).

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Due qualunque frazioni saranno sempre fra loro in ragione composta dalla diretta ragione de' numeratori, e dalla ragione inversa dei denominatori; sarà cioè la prima frazione alla seconda, come il prodotto del numeratore della prima nel de

nominatore della ſeconda, al prodotto del denominatore della prima nel numeratore della ſeconda.

Sieno date due frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, dico, che ſarà $\frac{a}{c} : \frac{b}{m} :: am : bc$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè de' quattro termini $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, am, bc moltiplicando il primo $\frac{a}{c}$ pel quarto bc ſi forma (arit. 134.) il prodotto $\frac{abc}{c}$, cioè ab (aritm. 123.) Similmente moltiplicando il ſecondo $\frac{b}{m}$ pel terzo am ne naſce lo ſteſſo prodotto $\frac{abm}{m}$, cioè ab; dunque eſſi termini [propoſ. 2.] ſono proporzionali, cioè $\frac{a}{c} : \frac{b}{m} :: am : bc$; ma la ragione $am : bc$ (cor. 3. def. 6.) è compoſta dalle due ragioni $a : b$, ed $m : c$, la prima delle quali $a : b$ è ragione diretta de' numeratori a, b; e la ſeconda $m : c$ è ragione reciproca, o inverſa della ragione $c : m$ diretta dei denominatori c, ed m (def. 5.). Dunque le date frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$ ſono tra di loro in ragione compoſta dalla ragione diretta dei numeratori, e dalla reciproca ragione dei denominatori. Il che, ec.

Sieno le due frazioni $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{5}$, farà $\frac{4}{7} : \frac{2}{5} :: 20 : 14$; onde si può facilmente conoscere, che la frazione $\frac{4}{7}$ contiene una volta, e tre settimi l' altra frazione $\frac{2}{5}$.

PROPOPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Le frazioni del medesimo nome sono fra loro in ragione diretta de' loro numeratori.

Ma le frazioni, che hanno lo stesso numeratore sono fra loro in ragione reciproca de' loro denominatori.

1. Sieno le frazioni della medesima denominazione $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$, farà $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè il prodotto del primo termine $\frac{a}{m}$ nel quarto c, cioè $\frac{ac}{m}$ è uguale al prodotto del secondo termine $\frac{c}{m}$ nel terzo a, il quale è parimente $\frac{ac}{m}$; dunque [propos. 2.] essi termini sono proporzionali $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$; cioè la prima frazione sta alla seconda direttamente, come il numeratore della prima al numeratore della seconda.

2. Sieno le frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$, aventi lo ſteſſo numeratore a, ſarà $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$.

DIMOSTRAZIONE. Il prodotto del primo termine $\frac{a}{c}$ nel quarto c [aritm. 118.] è a; ed il prodotto del ſecondo termine $\frac{a}{m}$ nel terzo m è parimente a; dunque ſono proporzionali [propoſ. 2.] eſſi termini $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$, cioè la prima frazione ſta alla ſeconda, reciprocamente come il denominatore della ſeconda al denominatore della prima. Il che, ec.

COROLLARIO I. Se dunque due diſuguali quantità a, c ſi divideranno per un medeſimo diviſore m, i quozienti $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$ ſtaranno tra di loro in ragione diretta delle date quantità a, c; eſſendoſi dimoſtrato eſſere $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$; vale a dire la metà di qualſivoglia quantità, ſta alla metà di qualunque altra quantità, come la prima quantità alla ſeconda. Parimente la terza parte della prima ſtarà alla terza parte della ſeconda, come ſta la prima alla ſeconda, e così ſucceſſivamente.

E' la propoſ. 15. del lib. 5. d' Euclide.

I numeri verbigrazia 48, e 18 ſi dividano amendue per 6, ſarà $\frac{48}{6} : \frac{18}{6} :: 48 : 18$, cioè $8 : 3 :: 48 : 18$.

COROLLARIO II. Ma ſe una medeſima quantità a ſi dividerà da due diverſe quantità c, ed m, allora i quozienti $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ ſtaranno tra di loro in reciproca ragione de' diviſori c, ed m; poichè ſi è dimoſtrato eſſere $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$; vale a dire il primo quoziente ſta al ſecondo, come reciprocamente il ſecondo diviſore al primo.

Come dividendo il 42 pei due numeri 2, e 6, ſarà $\frac{42}{2} : \frac{42}{6} :: 6 : 2$, cioè $21 : 7 :: 6 : 2$, come chiaramente ſi vede.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Date quante ſi vogliono quantità dello ſteſſo genere, la ragione della prima all' ultima ſarà ſempre compoſta da tutte le intermedie ragioni, cioè dalle ragioni della prima alla ſeconda, della ſeconda alla terza, della terza alla quarta, ec.

Sieno le quantità omogenee a, b, c, m, s, t, r, ec. Dico, che la ragione $a : r$ ſarà compoſta da tutte le intermedie ragioni $a : b$, $b : c$, $c : m$, $m : s$, $s : t$, $t : r$,

DIMOSTRAZIONE. Si moltiplichino fra loro gli antecedenti a, b, c, m, s, t di eſſe intermedie ragioni, e tra di loro ſi moltiplichino i conſeguenti b, c, m, s, t, r; ed i prodotti $abcmst$, $bcmstr$ [cor. 3. def. 6.] formeranno la ragione $abcmst : bcmstr$ com-

posta da tutte le date ragioni intermedie; ma (propos. 2.) abbiamo $abcmst : bcmstr :: a : r$, perchè il prodotto degli estremi $abcmst \times r$ uguaglia il prodotto de' medii $bcmstr \times a$. Dunque la ragione della prima a all' ultima r è composta da tutte le intermedie ragioni $a:b$, $b:c$, $c:m$, ec. il che, ec.

Sieno dati i numeri 48, 12, 6, 24, 4, 2; la ragione del primo 48 all' ultimo 2 sarà composta da tutte le intermedie ragioni 48 : 12, 12:6, 6 : 24, 24:4, 4 : 2; perciocchè se i valori di esse $\frac{48}{12}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{4}{2}$, cioè 4, 2, $\frac{1}{4}$, 6, 2 si moltiplicheranno fra loro il prodotto sarà $4 \times 2 \times \frac{1}{4} \times 6 \times 2$, cioè $\frac{96}{4}$, vale a dire 24; ed il valore della ragione 48 : 2 è parimente $\frac{48}{2}$, cioè 24; dunque [def. 6.] questa ragione è composta da quelle.

COROLLARIO. Adunque qualsivoglia data ragione $a:b$ si può dividere in quante ragioni piace, frapponendo tra l' antecedente a, ed il conseguente b quante si vogliono grandezze omogenee alle quantità a, e b, ed allora per l' antecedente dimostrazione la ragione $a:b$ sarà composta da tutte le intermedie ragioni, e conseguentemente resterà divisa in tante ragioni, quante saranno le ragioni intermedie.

Così data la ragione 6 : 2, se tra 'l 6, e 'l 2 si interporranno i numeri 5, 4, 7; allora avendo i numeri 6, 5, 4, 7, 2, la ragione del primo 6 all' ultimo 2, per l' antecedente dimostrazione sarà composta da tutte le intermedie ragioni 6 : 5, 5 : 4, 4 : 7, 7 : 2, e però la stessa ragione 6 : 2 rimarrà divisa nelle suddette quattro ragioni.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

In ogni progreſſione geometrica la ragione del primo termine al terzo è duplicata, o ſia quadrata della ragione del primo al ſecondo. La ragione del primo al quarto è triplicata, o ſia cubica di quella, che ha il primo al ſecondo. La ragione del primo al quinto è quadruplicata della ragione del primo al ſecondo, e così ſucceſſivamente.

Sia data la geometrica progreſſione

$\div a : b : c : m : r : s : t$, ec. Sarà $a : c :: a^2 : b^2$, come già ſi è dimoſtrato nel corollario 4 della propoſizione 2.

Inoltre ſarà $a : m :: a^3 : b^3$, $a : r :: a^4 : b^4$

$a : s :: a^5 : b^5$. ec.

DIMOSTRAZIONE. La ragione $a : m$ [propoſ. antec.] è compoſta dalle tre intermedie ragioni $a : b$, $b : c$, $c : m$, le quali ſono, d'ipoteſi, uguali fra loro; perciò [cor. 1. def. 7) la ragione $a : m$ ſarà triplicata di ciaſcuna di eſſe; dunque [cor. 2. def. 7.] ſarà $a : m :: a^3 : b^3$.

Col medeſimo raziocinio ſi dimoſtra, che la ragione $a : r$ è quadruplicata, o ſia quadrato-quadrata della ragione $a : b$; ſtantechè la ragione $a : r$ (propoſ. antec.) è compoſta dalle quattro intermedie ragioni uguali $a : b$, $b : c$, $c : m$, $m : r$; ſarà perciò $a : r :: a^4 : b^4$. Similmilmente ſi dimoſtra $a : s :: a^5 : b^5$, ed $a : t :: a^6 : b^6$, e così ſucceſſivamente ſino all' infinito. Il che, ec.

Sia $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$, ec. ſarà $2 : 8 :: 4 : 16$, $2 : 16 :: 8 : 64$, $2 : 32 :: 16 : 256$.

COROLLARIO. Conſeguentemente la ragione $a : b$, cioè del primo al ſecondo (cor. 3. def. 7.) è ſudduplicata, o ſia ſuqquadrata della ragione $a : c$ del primo al terzo; è ſùtriplicata, o ſuccubica della ragione $a : m$ del primo cioè al quarto, e così ſùcceſſivamente.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

In qualſivoglia progreſſione geometrica il prodotto degli eſtremi è ſempre uguale al prodotto di due termini ugualmente diſtanti dagli eſtremi; ed è uguale al quadrato del termine medio, quando il numero dei termini è diſpari.

DIMOSTRAZIONE. Sia data la progreſſione geometrica $\div a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7$ ec. ſarà $a \times ac^7 = ac \times ac^6 = ac^2 \times ac^5 = ac^3 \times ac^4$, cioè $a^2 c^7$, come reſta evidente.

Parimente data la progreſſione
$\div ac^8 : ac^7 : ac^6 : ac^5 : ac^4$; ſi avrà $ac^8 \times ac^4 = ac^7 \times ac^5$, cioè $= a^2 c^{12}$ quadrato del termine medio ac^6, come chiaramente ſi vede. Dunque, ec. Il che ec.

Sia in numeri la progreſſione
$\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729$, ſarà
$1 \times 729 = 3 \times 243 = 9 \times 81 = 27 \times 27$.

PROPOSIZIONE XX.

PROBLEMA.

Dati il denominatore della ragione, il minimo termine, ed il maſſimo di una geometrica progreſſione, ritrovare la ſomma di tutti i termini di eſſa.

RISOLUZIONE. Dal maſſimo termine ſi ſottragga il minimo, ed il reſiduo ſi divida pel denominatore della ragione diminuito dell' unità, ed al quoziente ſi aggiunga il maſſimo termine, e ſi avrà la ſomma ricercata di tutti i termini della data progreſſione.

DIMOSTRAZIONE. Sieno della geometrica progreſſione il minimo termine a, il maſſimo ac^5, ed il denominatore della ragione ſia c, per ritrovare la ſomma di tutti i termini, ſi ſottragga il minimo termine a dal maſſimo ac^5, ed il reſiduo ac^5-a dividaſi pel denominatore c diminuito dell' unità, cioè per $c-1$, e ſi troverà il quoziente (aritm. 75. 76.) $ac^4+ac^3+ac^2+ac+a$, al quale ſi aggiunga il termine maſſimo ac^5, e ſi avrà la ſomma $ac^5+ac^4+ac^3+ac^2+ac+a$, la quale è la ricercata ſomma di tutti i termini della progreſſione $\div a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5$. Il che, ec.

Sia la progreſſione $\div 243 : 81 : 27 : 9 : 3$, la ſomma di tutti i termini ſarà

$$\frac{243-3}{3-1}+243=\frac{240}{2}+243, \text{ cioè } 120+243=363.$$

Similmente della progreſſione

$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, la ſomma ſarà

$\frac{64-1}{2-1}+64=\frac{63}{1}+64$, cioè 127.

Parimente della progreſſione decreſcente.

$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ la ſomma ſarà

$\frac{1-\frac{1}{32}}{2-1}+1=\frac{32-1}{\frac{32}{1}}+1=\frac{31}{32}+1$, cioè $1\frac{31}{32}$.

ANNOTAZIONE. Nelle geometriche progreſſioni decreſcenti, ſe ſi concepiſcono prolungate all' infinito, perchè i termini di eſſe ſempre decreſcono nella ſteſſa ragione, il termine infiniteſimo ſarà più piccolo di qualunque quantità immaginare ſi poſſa, e perció ſenza pericolo di fare veruno errore ſenſibile, ſi può prendere la cifra 0 per ultimo termine di tali progreſſioni. Laonde per l' antecedente dimoſtrazione, ſi potrà trovare la ſomma di tutti gl' infiniti termini di qualſivoglia progreſſione geometrica decreſcente all' infinito.

(Il ſegno, che ſerve a dinotare l' infinito ſi è queſto ∞, e diceſi *infinito*.)

Come dell' antecedente progreſſione

$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ ec. ∞, continuata all' infinito

la ſomma ſarà $\frac{1-0}{2-1}+1$, cioè $\frac{1}{1}+1=2$.

Similmente la ſomma della progreſſione

$\div\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81}$ ec. ∞ ſarà $\frac{1-0}{3-1}+1=\frac{1}{2}+1$,

cioè $1\frac{1}{2}$. Nella medeſima maniera ſi trova la ſomma di ogni altra ſimile progreſſione continuata all' infinito.

DIMOSTRAZIONE

Per togliere a' principianti ogni difficoltà, e ribrezzo, che aver poſſano di prendere la cifra o pel termine infiniteſimo di una progreſſione geometrica decreſcente all' infinito, ſupponiamo, che la quantità $c^3-3c^2x+3cx^2-x^3$ ſi debba dividere per $c^2-2cx+x^2$; ſe la diviſione s' inſtituiſce per c^2, o per x^2 come abbiamo inſegnato nell' aritmetica (77.), facilmente ſi trova il quoziente $c-x$; ma iſtituendola pel termine $-2cx$, cioè dividendo il termine $-3c^2x$ per $-2cx$, ſi ha $\frac{3}{2}c$ per primo termine del quoziente, che moltiplicato per tutto il diviſore, e ſottrattone il prodotto dalla quantità dividenda, rimane da dividerſi $-\frac{1}{2}c^3+\frac{3}{2}cx^2-x^3$, e di queſto reſiduo

$$c^3-3c^2x+3cx^2-x^3 \quad \Big| \; c^2-2cx+x^2$$

$$-\frac{3}{2}c^3+3c^2x-\frac{3}{2}cx^2 \qquad \frac{3}{2}c-\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}c-\frac{3}{16}x$$

$$-\frac{1}{2}c^3+\frac{3}{2}cx^2-x^3$$

$$+\frac{3}{4}c^2x-\frac{3}{2}cx^2+\frac{3}{4}x^3$$

$$-\frac{1}{2}c^3-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}c^2x$$

$$+\frac{3}{8}c^3-\frac{3}{4}c^2x+\frac{3}{8}cx^2$$

$$-\frac{1}{8}c^3-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{8}cx^2$$

dividendo il termine $+\frac{3}{2}cx^2$ per $-2cx$, ſi ricava $-\frac{3}{4}x$ per ſecondo termine del quoziente, che moltiplicato per tutto il diviſore, e ſottrattone il prodotto dalla quantità dividenda, rimane a dividerſi

$-\frac{1}{2}c^3-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}c^2x$; e dividendo il termine

$+\frac{3}{4}c^2x$ per $-2cx$, ſarà $-\frac{3}{8}c$ terzo termine del quoziente, e moltiplicatolo pel diviſore, indi ſottrattone il prodotto dalla quantità dividenda, rimarrà la quantità dividenda $-\frac{1}{8}c^3-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{8}cx^2$, di cui dividendo il termine $+\frac{3}{8}cx^2$ per $-2cx$, termine aſſunto del diviſore, ſi otterrà $-\frac{3}{16}x$ per quarto termine del quoziente, e continuando la diviſione, ſi troverà $-\frac{3}{32}c$ per quinto termine, $-\frac{3}{64}x$ per ſeſto termine, $-\frac{3}{128}c$ per ſettimo termine, $-\frac{3}{256}x$ per ottavo termine ec. ſarà dunque $\frac{3}{2}c-\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}c-\frac{3}{16}x-\frac{3}{32}c-\frac{3}{64}x-\frac{3}{128}c$, ec. ∞ il quoziente di queſta diviſione, il quale per altro dee eſſere uguale alla quantità $c-x$, perciocchè ſi è diviſo il cubo di eſſa [aritm. 142, 143] pel ſuo quadrato, e per conſeguenza il quoziente dee eſſere la ſteſſa quantità $c-x$, o uguale ad eſſa, come accade in queſto caſo. Imperciocchè il ritrovato quoziente è compoſto dalla quantità poſitiva $\frac{3}{2}c$, cioè da $c+\frac{1}{2}c$, e dalla ſomma di due progreſſioni geometriche negative decreſcenti all' infinito in ragione ſuqquadrupla, e ſono

La prima $\div\!\div -\frac{3}{8}c : -\frac{3}{32}c : -\frac{3}{128}c : -\frac{3}{512}c$, ec. ∞

La ſeconda $\div\!\div -\frac{3}{4}x : -\frac{3}{16}x : -\frac{3}{64}x : -\frac{3}{256}x$, ec. ∞;

Or ſupponiamo, che l' ultimo, ed infiniteſimo termine di ciaſcuna di queſte decreſcenti progreſſioni ſia la cifra o negativa, perchè tutti i termini ſono negativi; la ſomma della prima, per l' antecedente dimoſtrazione, ſarà $\frac{-\frac{3}{8}c+0}{4-1} - \frac{3}{8}c$, cioè $-\frac{3}{24}c - \frac{3}{8}c$, e riducendo a minimi termini la frazione $\frac{3}{24}c$ eſſa ſomma ſarà $-\frac{1}{8}c - \frac{3}{8}c$, vale a dire $-\frac{4}{8}c$, o ſia $-\frac{1}{2}c$; e la ſomma della ſeconda progreſſione ſarà $\frac{-\frac{3}{4}x+0}{4-1} - \frac{3}{4}x$, vale a dire $-\frac{3}{12}x - \frac{3}{4}x$, e riducendo il $\frac{3}{12}x$ a minima eſpreſſione, eſſa ſomma ſarà $-\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x$, cioè $-\frac{4}{4}x$, o ſia $-x$.

Adunque la ſomma delle ſuddette due progreſſioni ſarà $-\frac{1}{2}c - x$, che aggiunta alla quantità poſitiva

$c+\frac{1}{2}c$ ne dà la ſomma $c+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}c-x$, cioè $c-x$ uguale al ſuddetto quoziente. Per la qual coſa nelle progreſſioni geometriche decreſcenti all' infinito, ſi dee prendere la cifra o per ultimo, e minimo termine di eſſe.

COROLLARIO. Da queſto dimoſtrato problema ſi deduce. 1. Che nella progreſſione geometrica, quando il denominatore della ragione è il numero due, allora la differenza tra 'l maſſimo, e 'l minimo termine uguaglia la ſomma di tutti i termini, eccettuatone il maſſimo. 2. Quando il denominatore della ragione è il numero tre, allora la differenza tra 'l maſſimo, ed il minimo termine è doppia della ſomma di tutti i termini, eccettuato il maſſimo. 3. Se il denominatore della ragione ſarà quattro, in tal caſo la differenza tra il maſſimo, e minimo termine ſarà tripla della ſomma di tutti i termini, eccettuato il maſſimo; e così proſeguendo.

Come data la geometrica progreſſione
$\div c : ac : a^2c : a^3c : a^4c$, ec.

1. Se ſarà $a=2$, la progreſſione diventerà
$\div c : 2c : 4c : 8c : 16c$, nella quale abbiamo $16c-c$, cioè $15c$ uguale alla ſomma $c+2c+4c+8c$.

2. Se facciaſi $a=3$, allora ſi avrà
$\div c : 3c : 9c : 27c : 81c$, in cui, come chiaramente appariſce, ſi ha $81c-c$, cioè $80c$ doppio della ſomma $c+3c+9c+27c$, che uguaglia $40c$.

3. Se ſia $a=4$, la ſuddetta progreſſione ſi traſformerà in queſt' altra $\div c : 4c : 16c : 64c : 256c$, in cui $256c-c$, cioè $255c$ è il triplo della ſomma $c+4c+16c+64c$, che è $85c$, e così ſucceſſivamente. Conſeguentemente nel primo caſo la differenza tra 'l maſſimo, e minimo

termine aggiunta al termine maſſimo ci dà la ſomma di tutti i termini della progreſſione. Nel ſecondo caſo la ſomma del maſſimo termine colla metà della differenza tra 'l maſſimo, e minimo termine è uguale alla ſomma di tutti i termini. ec.

DEFINIZIONE XII.

Ragione aritmetica diceſi quando fra loro ſi paragonano due quantità omogenee, e ſi conſidera ſoltanto la differenza, che paſſa fra loro: come $a.a+m$ (che leggeſi a all' $a+m$) è ragione aritmetica, nella quale il ſecondo termine $a+m$ ſupera il primo a della quantità m.

Similmente 9 . 5 è ragione aritmetica, quando ſi conſidera, che il 9 ſupera il 5 di quattro unità.

Ragioni aritmetiche uguali ſono quelle, che hanno le differenze uguali, quelle cioè, i cui antecedenti ſuperano ugualmente i loro conſeguenti, o ugualmente mancano dagli ſteſſi conſeguenti.

Le due ragioni 8 . 5, e 12 . 9 ſono uguali per eſſere $8-5=12-9$.

Similmente le due ragioni aritmetiche $a.a+m$, e $b.b+m$ ſono fra loro uguali, perchè gli antecedenti a, e b differiſcono della ſteſſa quantità m dai loro conſeguenti $a+m$, e $b+m$.

Paragonando fra loro due ragioni aritmetiche uguali, ſi forma la *proporzione aritmetica*. così l' 8 ſta al 5, come il 12 al 9, che ſcriveſi così $8.5 \therefore 12.9$, e ſi legge *l' otto al cinque come il dodici al nove*. Parimente è proporzione aritmetica $a.a-c \therefore b.b-c$.

La proporzione aritmetica diceſi *diſcreta*, quando il ſecondo termine non è uguale al terzo. Ma qualora il ſecondo termine è uguale al terzo, o ſia quando il

primo ſta al ſecondo, come lo ſteſſo ſecondo al terzo, allora ſi noma *proporzione continua*, e viene indicata con queſto ſegno $\div$, che ſignifica *proporzione aritmetica continua*; come $\div 2 . 5 . 8$, oppure $\div a . a+c . a+2c$, e quando ha più di tre termini, diceſi progreſſione.

Laonde la *progreſſione aritmetica* è una ſerie di quantità creſcenti, o decreſcenti per la medeſima differenza, come la progreſſione
$\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10$ ec., la quale chiamaſi ſerie de' numeri naturali.

Sono altresì aritmetiche progreſſioni le ſeguenti

$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22$ ec.

$\div a . a+c . a+2c . a+3c . a+4c$, ec.

$\div a . a-m . a-2m . a-3m . a-4m$, ec.

$\div 8 . 5 . 2 . -1 . -4 . -7 . -10$. ec.

$\div 6 . 4 . 2 . 0 . -2 . -6 . -8$, ec.

Da queſt' ultima ſi ſcorge, che nelle progreſſioni aritmetiche la cifra 0 può eſſere uno de' termini di eſſe.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Nell' aritmetica proporzione la ſomma degli eſtremi uguaglia la ſomma de' termini medii, ed è doppia del termine medio nella proporzione continua.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè data la proporzione aritmetica $a . a+m .\because. c . c+m$, egli è evidente, che la ſomma $a+c+m$ degli eſtremi è uguale alla ſomma $a+m+c$ de' termini medii. Similmente avendo la proporzione $a . a-c .\because. b . b-c$, ſi avrà l' equazione $a+b-c=a-c+b$.

Che ſe la proporzione ſarà continua, come $\div a \,.\, a+m \,.\, a+2m$, allora la ſomma degli eſtremi, che è $a+a+2m$, cioè $2a+2m$, è doppia del termine medio $a+m$, come chiaramente ſi vede. Il che eç.

Sia $12 \,.\, 7 \,.\!\cdot\!.\, 20 \,.\, 15$, ſarà $12+15=7+20$: ma avendo $\div 5 \,.\, 8 \,.\, 11$, ſarà $5+11$ doppio del termine medio 8.

COROLLARIO. Adunque dati tre termini dell' aritmetica proporzione, per ritrovare il quarto proporzionale, ſi ſommi il ſecondo col terzo, e da eſſa ſomma ſottraggaſi il primo, ed il reſiduo ſarà il quarto ricercato, poichè ſi è dimoſtrato, che la ſomma del primo col quarto uguaglia la ſomma del ſecondo col terzo. Come dati i tre temini $a \,.\, a+c \,.\!\cdot\!.\, b$., il quarto ſarà $a+c+b-a$, cioè $c+b$.

Ma ſe dati due termini, ſi dovrà trovare il terzo continuamente proporzionale; allora dal doppio del ſecondo ſi ſottragga il primo, e ſi avrà il ricercato terzo termine della proporzione continua.

Così de' due termini $\div a \,.\, a+m$ il terzo proporzionale ſarà $2a+2m-a$, cioè $a+2m$.

Finalmente dati il primo, e terzo termine, il medio proporzionale ſi troverà prendendo la metà della ſomma del primo col terzo. Così tra i due numeri 12, e 18 il medio proporzionale ſarà $\frac{12+18}{2}$, cioè 15, eſſendo $\div 12 \,.\, 15 \,.\, 18$.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Nella progreſſione arimetica la ſomma degli eſtremi è uguale a quella dei termini ugualmente diſtanti dagli

eſtremi; ed è doppia del termine medio, quando il numero de' termini è diſpari.

Così nella progreſſione aritmetica
$\div a \,.\, a+c \,.\, a+2c \,.\, a+3c \,.\, a+4c \,.\, a+5c$ noi abbiamo $a+a+5c=a+c+a+4c=a+2c+a+3c$, cioè $=2a+5c$.

Similmente nella progreſſione
$\div c \,.\, c-m \,.\, c-2m \,.\, c-3m \,.\, c-4m$ abbiamo
$c+c-4m=c-m+c-3m=2c-4m$ doppio del termine medio $c-2m$.

Sia $\div 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19$, ſarà
$1+19=4+16=7+13=10\times2$.

Medeſimamente ſe ſarà $\div 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, -1 \,.\, -3 \,.\, -5$, avremo $9-5=7-3=5-1=3+1$.

Parimente avendo la progreſſione
$\div 12 \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, 0 \,.\, -3 \,.\, -6$, ec. ſarà
$12-6=9-3=6+0=2\times3$ doppio del termine medio 3.

COROLLARIO I. Per la qualcoſa dati il primo termine, e l' ultimo, ed il numero de' termini della progreſſione aritmetica, a trovare la ſomma di tutti i termini di eſſa, ſi moltiplichi la ſomma del primo coll' ultimo pel numero de' termini, e ſi prenda la metà di eſſo prodotto, che ſarà la ricercata ſomma, la quale ſi può anche trovare moltiplicando la ſomma degli eſtremi per la metà del numero de' termini, o pure la metà della ſomma degli eſtremi per tutto il numero de' termini.

Come della progreſſione aritmetica
$\div a \,.\, a+c \,.\, a+2c \,.\, a+3c \,.\, a+4c$, la ſomma ſarà
$\frac{\overline{2a+4c}\times5}{2}$, o ſia $\overline{a+2c}\times5$, cioè $5a+10c$. Similmente della progreſſione $\div 1 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 13 \,.\, 17 \,.\, 21$, la ſomma ſarà $\frac{22\times6}{2}$, oppure 11×6, ovvero 22×3, cioè 66.

Parimente della progreſſione

$\div 12 . 9 . 6 . 3 . 0 . -3 . -6$ la ſomma ſarà $\frac{\overline{12-6}\times 7}{2}$,

cioè $3\times 7=21$.

COROLLARIO II. Dalle ſopradette nozioni facilmente ſi puó comprendere, che il maſſimo termine della progreſſione aritmetica altro non è, che la ſomma del minimo termine colla differenza moltiplicata pel numero de' termini diminuito dell' unità, come appariſce nella progreſſione $\div a . a+c . a+2c . a+3c . a+4c$, in cui il maſſimo termine $a+4c$ è la ſomma del primo a colla differenza c moltiplicata per $5-1$, cioè per 4, numero de' termini diminuito dell' unità. Adunque ſottraendo il minimo termine dal maſſimo, e dividendo il reſiduo pel numero de' termini ſcemato dell' unità, il quoziente ſarà la differenza regnante nella progreſſione.

Così nell' antecedente progreſſione ſi troverà

$\frac{a+4c-a}{5-1}$, cioè $\frac{4c}{4}$ uguale alla differenza c della progreſſione.

Medeſimamente nella progreſſione $\div 12 . 8 . 4 . 0 . -4 . -8$, ſottraendo il minimo -8 dal maſſimo 12, e dividendo il reſiduo $12+8$ (aritm. 52. 53.) cioè il 20 pel numero dei termini ſminuito dell' unità, che è $6-1$, cioè 5, il quoziente 4 ſarà la differenza ricercata.

DEFINIZIONE XIII.

Se a tutti i termini di una progreſſione geometrica, che abbia per primo termine l' unità, corriſponderanno ſucceſſivamente i termini d' una progreſſione aritmetica, il cui primo termine ſia la cifra o; allora ciaſcun ter-

termine della progreſſione aritmetica ſi chiama *logaritmo* del corriſpondente termine della Geometrica progreſſione.

Sieno per eſempio le due progreſſioni

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 ec.

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 ec.

Il 7 ſarà logaritmo del 128, il 5 logaritmo del 32, il 3 logaritmo dell' 8, e così diſcorrendo degli altri.

Le principali proprietà di queſti numeri chiamati logaritmi, ſono

1. Che la ſomma di due logaritmi è logaritmo del prodotto de' due numeri corriſpondenti della ſerie geometrica. Così ſommando il 5 [logaritmo di 32.] col 2, logaritmo di 4, la ſomma 7 è logaritmo del 128, che è il prodotto del 4 nel 32.

2. La differenza tra due logaritmi è logaritmo del quoziente, che naſce dividendo il numero, che ha il logaritmo maggiore per quello, che ha il logaritmo minore; per eſempio ſottraendo il 3 [logaritmo di 8] dal 7, logaritmo del 128, il reſiduo 4 è logaritmo del 16 quoziente, che ritrovaſi dividendo il 128 per 8.

3. Raddopiando il logaritmo d' un numero, ſi avrà il logaritmo del quadrato di eſſo numero; triplicandolo ſi avrà il logaritmo del cubo; quadruplicandolo ſi otterrà il logaritmo della quarta poteſtà del medeſimo numero, ec. Verbigrazia duplicando il 3, logaritmo di 8, ſi ha 6 logaritmo di 64, che è il quadrato dell' 8; triplicando lo ſteſſo 3, ſi ha il 9 logaritmo del 512, che è il cubo dell' 8. ec.

4. La metà del logaritmo d' un numero è logaritmo della radice quadrata di eſſo numero, la terza parte è logaritmo della radice cubica di eſſo numero, ec. Come l' 8 è logaritmo del numero 256, e la metà di 8, cioè 4 è logaritmo di 16 radice quadrata del

256. Il 6 è logaritmo del numero 64, e la terza parte di 6, cioè 2 è logaritmo del 4 radice cubica del 64, ec.

COROLLARIO. Adunque la moltiplicazione, la formazione delle poteſtà, la diviſione, e l' eſtrazione delle radici da' numeri, ſi riduce a pura ſomma, e ſottrazione de' logaritmi. Ma ſiccome la geometrica progreſſione non contiene la ſerie naturale di tutti i numeri; mancano perció i logaritmi de' numeri non compreſi nella ſerie geometrica. A queſto diffetto però con indicibile vantaggio delle matematiche ſcienze, e ſpecialmente della Trigonometria, e dell' Aſtronomia poſe riparo nel ſecolo paſſato il celebre Nepero Scozzeſe, Barone di Merchiſtonio, ec. coll' invenzione, e ritrovamento de' logaritmi di ciaſcun numero, e dopo di eſſo altri valentiſſimi geometri con immenſe fatiche formarono le tavole logaritmiche, che ſono di tanta utilità a' geometri per la maggiore ſpeditezza, e facilità di fare i calcoli più intricati, e faticoſi.

CALCOLO

DE' NUMERI DECIMALI.

Le ſopraddette tavole ſono ſtate calcolate coi numeri decimali, i quali altro non ſono, che frazioni decimali (aritm. 91.) ſcritte come ſcrivonſi i numeri interi; e ſiccome i numeri interi, cominciando dalla parte deſtrà, e procedendo verſo la ſiniſtra creſcono in ragione decupla; perciocchè (aritm. 7.) la figura 1 nella prima ſede ſignifica uno, e poſta nella ſeconda ſede, cioè a ſiniſtra della prima, ſignifica 10, nella terza ſede eſprime 100, nella quarta ſignifica 1000, e così continuando all' infinito; la medeſima coſa s' intenda delle altre figure aritmetiche; al contrario i nu-

meri decimali ſi ſcrivono dalla ſiniſtra verſo deſtra, e decreſcono in ragione ſuddecupla, in maniera che la figura 1 nella prima ſede a ſiniſtra ſignifica $\frac{1}{10}$, e poſta nella ſeconda ſede, cioè a deſtra della prima ſignifica $\frac{1}{100}$, nella terza ſede ſignifica $\frac{1}{1000}$; nella quarta eſprime $\frac{1}{10000}$, e così proſeguendo all' infinito. Lo ſteſſo ſi dee intendere delle altre figure, verbigrazia il 3 nella prima ſede ſignifica $\frac{3}{10}$ nella ſeconda ſignifica $\frac{3}{100}$, nella terza eſprime $\frac{3}{1000}$, ec.

Queſti numeri decimali ſcrivonſi alla deſtra degl' interi, ſeparandoli da eſſi con un punto; e ſe non vi ſono numeri interi, ſi mette la cifra 0 in loro vece. Così in luogo di ſcrivere $23\frac{47}{100}$, ſi ſcrive 23.47; e per eſprimere $\frac{243}{1000}$ ſcriveſi 0.243. Similmente nelle ſedi vuote di numeri ſi mette la cifra 0. Come volendo eſprimere la frazione $\frac{17}{1000}$ ſi ſcrive 0.017; e la frazione $\frac{301}{100000}$ ſi eſprime ſcrivendo 0.00301.

Parimente il numero $16\frac{3}{1000}$ ſi ſcrive 16.003, e così diſcorrendo.

Per la qual coſa un numero decimale ſcritto ordinatamente come ſi è detto, s' intende ſempre, che abbia per denominatore l' unità con altrettanti zeri, quante ſono le figure, che ha il dato numero decimale.

Inoltre ad un numero decimale aggiugnendo, o togliendogli ſulla deſtra quanti zeri piace, non ſi cangia il ſuo valore.

I numeri, eſempigrazia, 0.1, 0.10, 0.100, 0.1000, ec. Significano la ſteſſa quantità, cioè il decimo dell' intero, perchè eſſi numeri equivagliono alle frazioni $\frac{1}{10}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{100}{1000}$, $\frac{1000}{10000}$, le quali (aritm. 101.) ſono tutte uguali fra loro, e ciaſcuna di eſſe ſignifica una decima parte dell' unità.

Parimente il numero 0.500 ſi eſprime per 0.50, o per 0.5, perchè $\frac{500}{1000}$ ſignifica $\frac{50}{100}$, o ſia $\frac{5}{10}$; e così degli altri.

La ſomma de' numeri decimali ſi fa come quella degl' interi, ſcrivendoli prima ordinatamente, cioè gl' interi, ſotto gl' interi ſe ve ne ſono, indi i decimali ſotto ai decimali.

Per esempio la somma de' numeri 13.2705, 4.93, 0.05173, sarà 18.25223, cioè 18 interi colla frazione $\frac{25223}{100000}$; come ognuno può

$$\begin{array}{r} 13.2705 \\ 4.93 \\ 0.05173 \\ \hline 18.25223 \end{array}$$

facilmente dimostrarlo, sommando gl' interi colle frazioni decimali, nella maniera stata insegnata al numero 129 dell' aritmetica.

Da questo esempio chiaro apparisce, che gl' interi si considerano come congiunti cogli annessi decimali; perciocchè qualsivoglia intero, per esempio 5 si può [aritm. 119.] esprimere per 5.0, cioè per $\frac{50}{10}$, ovvero per 5.00, cioè per $\frac{500}{100}$ ec.

Nella sottrazione de' numeri decimali (che si fa come quella de' numeri interi) quando il numero minuendo ha un numero di figure decimali minore del numero, che ne ha il sottraendo, allora si uguaglia mettendovi dei zeri. Così dovendosi dal numero 16.83 sottrarre il numero 7.9652, si scriverà 16.8300 per numero minuendo; e fatta la sottrazione, come se fossero tutti interi, il residuo sarà 8.8648, cioè 8 interi colla frazione $\frac{8648}{10000}$.

$$\begin{array}{r} 16.8300 \\ 7.9652 \\ \hline 8.8648 \end{array}$$

La moltiplicazione de' decimali si fa come se fossero numeri interi, e ritrovatone il prodotto, da esso si separano col punto, e verso la destra altrettante

figure, quante decimali n' aveano tra tutti due i moltiplicatori.

Così moltiplicando il numero 25.364 per 2.07, il prodotto sarà 5250348, dal quale si deono separare verso destra cinque figure, perchè altrettante ne hanno tra il moltiplicatore, ed il moltiplicando; onde esso prodotto sarà 52.50348.

$$\begin{array}{r} 25.364 \\ 2.07 \\ \hline 177548 \\ 507280 \\ \hline 52.50348 \end{array}$$

Quando nel prodotto non vi sono tante figure, quante decimali si trovano ne' due molipliçatori allora si mettano dei zeri nelle sedi mancanti di figure. Verbigrazia moltiplicando il numero 0.0032, cioè $\frac{32}{10000}$, per 0.41, cioè per $\frac{41}{100}$, il prodotto è 1312 di quattro sole figure, e da esso se ne deono separare sei alla destra; perchè i due moltiplicatori hanno sei decimali; perciò si aggiungano due zeri per riempire le sedi vuote, ed un altro zero per dinotare la prima sede degl' interi, ed il suddetto prodotto sarà 0.001312, cioè $\frac{1312}{1000000}$.

$$\begin{array}{r} 0.0032 \\ 0.41 \\ \hline 32 \\ 128 \\ \hline 0.001312 \end{array}$$

La divisione de' numeri decimali si fa eziandio come quella de' numeri interi, e quando il divisore non è contenuto intere volte nel dividendo, si può continuare quanto piace la divisione, aggiugnendo de' zeri alla destra del dividendo.

Se il dividendo non ha tante figure decimali, quante ne ha il divisore, se gli aggiungano de' zeri alla destra, per renderlo di uguale, o di maggior numero di decimali.

Quando hanno ugual numero di decimali, se, dopo fatta la divisione, non vi rimane verun avanzo, il quoziente sarà un numero intero senza decimali. Ma quando il dividendo ne ha di più, o si accrescono nel fare la divisione, allora il quoziente dee avere tante figure decimali, quante ne ha il dividendo di più del divisore; vale a dire tra 'l quoziente, e 'l divisore deono avere tante figure decimali, quante ne ha il dividendo, come si vedrà ne' seguenti esempi.

Dividendo il numero 1.77548 per 0.07, il quoziente è 25364, dal quale si deono separare a destra tre figure decimali, poichè dalle cinque, che ha il dividendo levandone due, che ha il divisore, rimangono tre pel quoziente, il quale perciò sarà 25.364.

1.77548	0.07
	25.364

Se il dividendo sarà 0.64, ed il divisore sia 0.0032, che ha due decimali di più del dividendo; perciò al dividendo si aggiungano due zeri, e si divida 0.6400 pel dato divisore 0.0032, il quoziente sarà il numero intero 200, perchè il divisore, ed il dividendo hanno ugual numero di figure decimali. Per provare questa verità basta far l' operazione colle frazioni, cioè

0.6400	0.0032
	200

[aritm. 136.] dividere la frazione $\frac{64}{100}$ [che signi-

fica 0.64] per $\frac{32}{10000}$ (che equivale al numero decimale 0.0032) e si troverà lo stesso quoziente 200.

Similmente dividendo il numero 128.82 pel divisore 0.0064, aggiugnendo dei zeri al dividendo, quanti saranno necessari per continuare la divisione, la quale terminata ci dà il quoziente 20128125, dal quale

```
128.8200000 |0.0064
    082      20128.125
     180
      520
       .80
        160
         320
```

si debbono separare a destra col punto tre decimali, perchè dalle sette, che ha il dividendo, levandone quattro, che ha il divisore, restano tre pel quoziente, il quale perciò sarà 20128.125, cioè 20128 interi colla frazione $\frac{125}{1000}$.

Qualsivoglia frazione si puó ridurre in parti decimali, moltiplicando il numeratore della frazione pel denominatore delle parti decimali, e dividendo il prodotto pel denominatore della data frazione, ed il quoziente sarà il ricercato numero decimale; cioè facciasi una regola del tre, che abbia per primo termine il denominatore della frazione, ed il numeratore per secondo; e per terzo termine il denominatore decimale, cioè il 10, o il 100, o il 1000, ec.; verbigrazia si vuole ridurre in decimali la frazione $\frac{3}{8}$; facciasi la regola di proporzione 8 : 3 : : 1000 al quarto, che sarà $\frac{3000}{8}$,

cioè 375, dunque ſono $\frac{3}{8}=0.375$ cioè $\frac{3}{8}=\frac{375}{1000}$.

Quando non ſi può trovare il quoziente in interi, allora ſi continua quanto piace la diviſione, e ſi troverà un numero decimale approſſimante. Così per ridurre in parti decimali la frazione $\frac{5}{6}$, moltiplicato il 5 per 100, o per 1000. ec., e diviſo il prodotto per 6, ſi troverà il quoziente 83333, ec. col reſiduo 2, onde ſi puó continuare all' infinito la diviſrone, aggiugnendo de' zeri al dividendo, e mai non ſi troverà il quoziente in interi; ciò non oſtante il numero decimale 0.83333 ſarà proſſimamente uguale alla frazione $\frac{5}{6}$,

```
5000  | 6
      -------
20     0.83333
 20
  20
   20
    2
```

poichè non gli manca nemmeno una centomileſima parte dell' unità, per eſſergli perfettamente uguale, eſſendo la frazione $\frac{5}{6}$ alquanto maggiore di 0.83333, ed alquanto minore del numero decimale 0.83334; Laonde ſenza pericolo di far errore ſenſibile, il numero decimale 0.83333 ſi puó conſiderare come uguale alla frazione $\frac{5}{6}$.

Queſta operazione è di moltiſſima utilità nell' eſtrazione delle radici per approſſimazione; perciocchè i zeri, che ſi aggiungono, per maggiormente approſſimarſi alla

vera radice col continuare l'operazione [come abbiamo fatto aritm. nn. 160, 166] sono figure decimali, e si aggiungono due a due, acciocchè il denominatore delle figure aggiunte sia un numero quadrato, quando si dee estrarre la radice quadrata; e quando si cerca la radice cubica per approssimazione i zeri si aggiungono tre a tre, acciocchè i denominatori decimali sieno numeri cubi.

Ma quando il numero, da cui dee estrarsi la radice, ha delle note decimali, per non errare, se le decimali sono dispari, si aggiunga uno zero per renderle pari, qualora si dee estrarre la radice quadrata; ma dovendo estrarre la radice cubica, allora coll' aggiugnere i zeri necessari, si faccia in maniera, che il numero delle figure decimali sia sempre divisibile in interi pel numero 3.

Inoltre questa operazione è di grandissimo vantaggio nella divisione, quando vi rimane un avanzo di qualche considerazione; poichè con questo metodo continuando la divisione colla giunta di quanti zeri piace, si trova un quoziente sempre più approssimante al vero; trascurando poscia l' ultimo residuo, perchè ridotto ad una particella, o minuzia insensibile.

Vicendevolmente, dato un numero di parti decimali, si riduce ad una frazione d' un dato nome, e ciò si ottiene moltiplicando il denominatore della proposta frazione nel numero decimale, e dividendo il prodotto pel denominatore delle figure decimali [che, come già abbiamo detto, è sempre l' unità con tanti zeri a destra, quante sono le note decimali]; il quoziente sarà il numeratore della proposta frazione. Per esempio avendo 0.875 parti decimali del trabucco, si cerca quanti piedi, ed oncie contengano esse parti;

che in questo caso significano $\frac{875}{1000}$ del trabucco. Or essendo il piede liprando $\frac{1}{6}$ del trabucco, perciò si moltiplichino le parti decimali 0.875 pel denominatore 6 della proposta frazione, ed il prodotto 5.250 si divida per 1000 denominatore decimale, ed il quoziente 5 sarà numeratore della frazione $\frac{5}{6}$, che significa cinque sesti del trabucco, cioè piedi 5; l' avanzo 0.250 si riduca in una frazione, che abbia il 12 per denominatore, perchè l' oncia è $\frac{1}{12}$ del piede; si moltiplichi adunque il residuo 0.250 per 12, ed il prodotto 3.000 si divida pel divisore 1000, il quoziente 3 significa $\frac{3}{12}$ del piede, cioè 3 oncie. Adunque parti decimali 0.875 del trabucco significano piedi 5, ed oncie 3.

Finalmente occorrendo di dover esprimere con numero decimale le parti di qualsivoglia intero diviso in diverse specie, ciò facilmente si otterrà col ridurre le date parti alla denominazione della specie minore; indi si riduca la ritrovata frazione in parti decimali, come poco anzi si è dimostrato. Si debbano, per esempio, esprimere con numero decimale piedi 2, once 7, punti 6 del trabucco, qui si dee premettere che il trabucco nostrale è diviso in 6 piedi, il piede in 12 once, e l' oncia in 12 punti, dal che ne segue, che il piede è la sesta parte del trabucco, l' oncia è la settantaduesima parte di esso, ed il punto è la ottocen-

ſeſſantaquattreſima parte del medeſimo trabucco, e che punti 6 ſono $\frac{6}{864}$, cioè ſei ottocenſeſſantaquattreſime parti di eſſo. Ciò premeſſo ſi riducano i piedi 2, e le once 7, che fanno once 31, in punti, moltiplicandole per 12, e ſi avranno 372 punti, che aggiunti ai ſuddetti 6, fanno 378 punti, o ſia $\frac{378}{864}$ eſimi del trabucco. Poſcia, come poco avanti ſi è inſegnato (pag. 224) ſi riduca queſta frazione in parti decimali, moltiplicando il numeratore 378 per 1000, o per 10000, e dividendo il prodotto 370000 pel denominatore 864, ſi troverà il quoziente 4375; perciò piedi 2, once 7, punti 6 ſi eſprimeranno eſattamente dal numero decimale 0.4375, che ſignifica quattromila trecento ſettantacinque diecimileſime parti del trabucco, che rimane diviſo in dieci mila parti uguali.

DEFINIZIONE XIV.

Armonica, o muſica proporzione diceſi quando di tre quantità continuamente diſuguali la prima ſta alla terza, come la differenza tra la prima, e la ſeconda alla differenza tra la ſeconda, e la terza. I tre numeri 8, 12, 24 ſono armonicamente proporzionali, poichè ſta $8 : 24 :: 12-8 : 24-12$, cioè $8 : 24 :: 4 : 12$. Similmente ſono in proporzione armonica i tre numeri 6, 3, 2, perchè ſta $6 : 2 :: 6-3 : 3-2$, cioè $:: 3 : 1$.

A trovare tre termini in proporzione armonica baſta prendere tre termini, che ſiano in proporzione aritmetica continua, e moltiplicare il primo nel ſecondo, il prodotto ſarà primo termine della proporzione armoni-

ca, indi moltiplicare il primo pel terzo, ed il prodotto sarà secondo termine; ed il prodotto del secondo nel terzo della proporzione aritmetica sarà terzo termine dell' armonica.

Così avendo i tre numeri $\div 2 . 6 . 10$ in proporzione aritmetica continua, si troveranno i numeri 2×6, 2×10, 6×10, cioè $12 . 20 . 60$ in proporzione armonica, stando $12 : 60 :: 20-12 : 60-20$, cioè $12 : 60 :: 8 : 40$.

Dati due termini della proporzione armonica, si troverà il terzo dividendo il prodotto dei due primi pel doppio del primo meno il secondo. Sieno i due termini a, c, ed il terzo incognito si chiami x, sarà $a : x :: a-c : c-x$; onde [propos. 1.] si avrà $ax-cx=ac-ax$, e per antitesi [aritm. 106.] sarà $2ax-cx=ac$, e dividendo l' equazione per $2a-c$ [ass. 5.] rimarrà $x=\frac{ac}{2a-c}$.

Se saranno dati il primo a, ed il terzo m, a trovare il medio x si divida il doppio prodotto del primo nel terzo per la loro somma, e si avrà per quoziente il medio termine. Poichè essendo i tre termini a, x, m in proporzione armonica, sarà $a : m :: a-x : x-m$, e peró [propos. 1.] si avrà $ax-am=am-mx$, e per antitesi sarà $ax+mx=2am$, e dividendo per $a+m$ [ass. 5.] sarà $x=\frac{2am}{a+m}$.

L' armonica proporzione può avere più di tre termini in due maniere; e primieramente si possono trovare due altri termini, che siano in armonica proporzione col terzo, e ciò si ottiene moltiplicando il secondo, e terzo pel denominatore della ragione del primo al terzo, e si avranno il quarto, e quinto ter-

mine, quando i termini della proporzione ſono creſcenti; ma quando i termini della data proporzione muſica decreſcono, biſogna dividere il ſecondo, ed il terzo pel medeſimo denominatore della ragione del primo al terzo, ed i quozienti daranno il quarto, e 'l quinto termine.

Sieno i tre termini creſcenti 4, 6, 12 in armonica proporzione, prendaſi il denominatore della ragione 4 : 12, che è 3, e per eſſo 3 ſi moltiplichino il ſecondo 6, ed il terzo 12, ed i prodotti 18, e 36 ſaranno i termini quarto, e quinto; onde ſaranno i termini 4; 6; 12; 18; 36 in armonica proporzione continua, i tre primi tra di loro, ed il terzo coi due ſeguenti fra loro; eſſendo 4 : 12 : : 6—4 : 12—6, e 12 : 36 : : 18—12 : 36—18.

Se il quarto, e quinto termine ſi moltiplicheranno per lo ſteſſo denominatore della ragione del primo al terzo, o del terzo al quinto, che è lo ſteſſo, ſi otterranno i termini ſeſto, e ſettimo in armonica proporzione col quinto, e così proſeguendo ſi può continuare all' infinito.

Sieno i termini decreſcenti 24; 12; 8 in armonica proporzione, dividendo il ſecondo 12, ed il terzo 8 pel denominatore 3 della ragione, 24 : 8, del primo al terzo, i quozienti 4, e $2\frac{2}{3}$ ſaranno i termini quarto, e quinto in armonica proporzione col terzo, e ſaranno i cinque termini 24; 12; 8; 4; $2\frac{2}{3}$, onde ſi ha $24 : 8 :: 24-12 : 12-8$, e $8 : 2\frac{2}{3} :: 8-4 : 4-2\frac{2}{3}$, cioè $8 : 2\frac{2}{3} :: 4 : 1\frac{1}{3}$.

Dividendo i termini quarto, e quinto per l' istesso denominatore della ragione del terzo al quinto, si otterranno i termini sesto, e settimo, ed in questo modo ancora si può continuare la proporzione musica con termini decrescenti all' infinito.

In secondo luogo l' armonica proporzione puó essere di quattro, o di più termini, ma in guisa, che i primi tre tra di loro; il secondo col terzo, e quarto fra loro, e così continuando, il terzo col quarto, e quinto fra loro ec. sieno armonicamente proporzionali. Tali sono i numeri 24, 12, 8, 6, $4\frac{4}{5}$, essendo $24 : 8 :: 24-12 : 12-8$, e $12 : 6 :: 12-8 : 8-6$, ed $8 : 4\frac{4}{5} :: 8-6 : 6-4\frac{4}{5}$.

Per ritrovare quanti si vogliono termini, in questa seconda maniera, armonicamente proporzionali, si prendano altrettanti numeri, che sieno in progressione aritmetica, e si moltiplichino tra di loro, ed il prodotto si divida per ciascuno di essi, i quozienti saranno in armonica proporzione. Così moltiplicando fra loro i numeri $\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$, il prodotto sarà 720, che dividasi per ciascuno di essi numeri, i quozienti 720, 360, 240, 180, 144, 120 sono in armonica proporzione continua. Inoltre se un numero sarà divisibile per più numeri, che sieno in aritmetica progressione, i quozienti saranno eziandio armonicamente proporzionali. Esempigrazia il 60 è divisibile per gli stessi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, ed i quozienti 60, 30, 20, 15, 12, 10 sono in continua armonica proporzione, come ognuno può vedere.

Quando dati tre termini, il terzo sta al primo, come la differenza tra 'l primo, e secondo, alla differenza tra 'l secondo, e terzo, allora la proporzione

dicesi *contrarmonica*. I tre numeri 9; 15; 18 sono in proporzione contrarmonica, perchè sta 18 : 9 : : 15—9 : 18—15, cioè : : 6 : 3.

Parimente i tre numeri 6, 5, 3 sono in proporzione contrarmonica, essendo 3 : 6 : : 6—5 : 5—3, ec.

ANNOTAZIONE. La proporzione armonica, o musica è stata così chiamata, perchè i numeri, che la costituiscono, contengono le consonanze della musica. Per esempio i numeri 12 . 6 . 4 . 3, che sono in armonica proporzione continua, contengono cinque consonanze musiche; poichè la ragione dupla 12 : 6, ovvero 6 : 3 costituisce la consonanza detta diapason, o sia ottava. La ragione sesquialtera 6 : 4 forma la consonanza chiamata diapente, o quinta. La ragione sesquiterza 4 : 3 esprime la consonanza nomata diattessaron, o quarta. La ragione tripla 12 : 4 constituisce la consonanza nominata diapason e diapente, o sia duodecima. E la ragione quadrupla 12 : 3 constituisce la consonanza appellata disdiapason, o decimaquinta.

FINE DEL LIBRO PRIMO DI GEOMETRIA, E DELLA PRIMA PARTE.